75

~~J. XII. 218.~~

Arith. u. Algebra

Ma.

o 75.

Constat — — 24 —

Exhaust — — 12 K

20 x 12 K. Ch. C.

1808.

Handbuch

der

Elementar-Arithmetik

in Verbindung mit der

Elementar-Algebra.

Zum Gebrauche für Anfänger

herausgegeben

von

Andreas Metz,

der Philosophie, und Theologie Doctor, und der Philosophie
an der Churfürstlichen Julius-Maximilians Universität
in Würzburg öffentl. und ordentl. Lehrer.

Bamberg und Würzburg.
bey Jos. Anton Göbhardt.
1804.

Staats-
Bibliothek
Bamberg

Vorbericht.

Die Anfänger, für welche nach der Erklärung auf dem Titelblatte dieses Handbuch geschrieben ist, sind zunächst Studenten von dem Schlage, wie sie nach der vorigen Verfassung unserer hiesigen gymnastischen Lehranstalt jedes Jahr von der Rhetorik — der letzten der sonst so genannten fünf unteren Schulen — zu dem zweyjährigen philosophischen Curse an demselben Gymnasium übergingen, um sich während desselben, und zwar im ersten Curse dem Studium der empirischen Psychologie, der Logik,

der Metaphysik in geschichtlicher Hinsicht *), und der Elementar-Mathesis nebst der Interpretation eines philosophischen

---

*) Sage „in geschichtlicher Hinsicht.“ Denn obgleich in dem 1794 vom Fürsten Franz Ludwig sanctionirten Organisations-Plane der philosophischen Studien an der Universität, und dem Gymnasium zu Würzburg ausdrücklich auch die Metaphysik mit dem Zusatze als Lehrgegenstand am Gymnasium vorgeschrieben wurde, daß die Lehrer, vermöge ihrer genauen Bekanntschaft mit den neuesten Fortschritten in der Philosophie das Mangelhafte in den einstweilen zum Gebrauche vorgeschriebenen Büchern des seel. Herrn Prof. Columban Rößer ergänzen und berichtigen sollten; was denn, wie Kennern bekannt ist, im Grunde eben so viel hieß, als die nöthige Anwendung der damahls modernen philosophischen Principien den Lehrern nicht nur erlauben, sondern sogar befehlen: so war doch nach dem Tode dieses Fürsten über den, nach den Principien der damahls neuesten Philosophie gemodelten Vortrag der Metaphysik, und der übrigen Lehrgegenstände am Gymnasium von Seite der stäts im Dunkeln schleichenden, und sich mitunter auch auf Spionerie verlegenden Obscurantenzunft des fanatischen Verketzerns, und böslichen Denuncirens, namentlich gegen den Verfasser des Gegenwärtigen, so viel, daß auch der muthvollste Wahrheitsfreund nach dem Bibeltexte „Nolite margaritas vestras projicere ante porcos — ne disrumpant vos“ — es für gerathen finden mußte, sich in das endlich abgedrungene Geboth „weder nach Kant, noch nach Fichte ꝛc. am Gymnasium zu philosophiren“ zu fügen. Statt dessen blieb nun weiter nichts übrig, als, nach Festsetzung des

Haupt-

schen Buches aus dem Alterthume; und im zweyten dem der Physik und Moral-Philosophie zu widmen.

Der Verfasser des Gegenwärtigen begleitete neun Jahre lang das Lehramt in diesen Sparten am Gymnasium (womit noch fünf Jahre hindurch die, ihm nach dem Tode des Hrn. Prof. Reuß übertragene Universitäts-Professur der Logik, Metaphysik, und der gesammten practischen Philosophie in Verbindung stand) und zwar so, daß Er nach der im Jahr

---

Hauptproblems der Metaphysik, dieser κατ' ἐξοχην so zu nennenden Philosophie, eine zur Verhütung alles weiteren Verdrusses absichtlich so betitelte bloß historische Erklärung des Ganges zu geben, den die Vernunft zur Lösung jenes Problems von Plato an bis auf unsere Zeiten verschiedentlich eingeschlagen hat, um wenigstens auf diesem Wege die Zuhörer theils zu überzeugen, daß die sogenannte Gymnasiums-Philosophie, nach den ihr gesetzten Schranken betrachtet, gar nicht einmahl den Namen der Philosophie verdiene, theils sie auf den Vortrag des Systems der Metaphysik an der Universität vorzubereiten, und ihnen dafür Interesse einzuflößen. Einen zweyten Grund hiefür hat der Verf. schon 1802 in seinem Prologus ad Materiam Disputationum publicarum deutlich genug angegeben.

1794 vorgeschriebenen Schulordnung seine Stu-
denten, den ganzen zweyjährigen Cursus durch-
führte, und nur in Ansehung der Interpre-
tation eines philosophischen Schriftstellers 8
Jahre lang im ersten, und der sogenannten Ex-
perimental-Physik 9 Jahre lang im zwey-
ten Curse von extraordinären Lehren, täglich um
eine Stunde, erleichtert wurde.

Auf diese Weise war es sein Beruf, jedes-
mahl im ersten Curse auch die Elementar-
Matheseis vorzutragen, — welchem Vortrage
auch mehrere Candidaten der Universität von Zeit
zu Zeit fleißig beywohnten — und so hatte er
Gelegenheit genug, alles zu bemerken, was den
Anfängern das Studium dieser Wissenschaft ent-
weder erleichtere, oder erschwere. Zu der letzten
Kategorie gehörte nun zunächst das Lehrbuch
selbst, welches seit 1774 auf unserer hohen
Schule für die Matheseis eingeführt war, und
den seel. Hrn. Prof. Trentel zum Verfasser hat.
Denn so gegründet und gerecht auch der Bey-

fall

fall war, mit dem dieses Lehrbuch anfänglich aufgenommen, und in Schulen eingeführt wurde: so wenig ist es doch zu läugnen, daß dasselbe nach den großen Fortschritten, welche die Mathesis während des Zeitraumes von 1774 bis auf unser Decennium mit anderen Wissenschaften gemacht hat, so wie fast jedes andere Lehrbuch von gleichem Zeitalter mancherley erhebliche Mängel habe, man mag nun auf die, von einem Lehrbuche mit Rechte zu fordernde durchgängige systematische Anordnung der Materien sehen, oder die durchgängige Richtigkeit in der Bestimmung der Begriffe, und größtmögliche Schärfe in der Demonstration nebst der Vollständigkeit des Ganzen zum Maßstabe der Beurtheilung machen. Selbst der seel. Hr. Verfasser, da Er mit dem Zeitgeiste in der Mathesis stäts fortzurücken bestrebt war, war von den Mängeln seines Buches in dem Grade überzeugt, daß Er eine Verbesserung derselben bey einer etwaigen neuen Auflage öfters wünschte, und auch selbst diese Verbesserung, gewiß zur Zufriedenheit aller Kritiker

vorgenommen haben würde, wenn nicht seine schwächliche Gesundheit, und der darauf erfolgte Tod es ihm unmöglich gemacht hätte. Weit entfernt also, den seel. Hrn. Prof. Trentel durch die oben behauptete, und leicht, wenn es erforderlich wäre, durch Gründe nachzuweisende Mangelhaftigkeit seines Lehrbuches zu tadeln, vielmehr ihm, als seinem ehemahligen stäts wohlwollenden öffentlichen und Privatlehrer den wärmsten Dank auf immer zollend, thut der Verfasser des Gegenwärtigen jener Mangelhaftigkeit hier nur deßwegen Erwähnung, theils um das Urtheil des Seeligen selbst über sein Buch dem Publicum zu eröffnen, und Ihn dadurch gegen das herabsetzende Urtheil Mancher öffentlich in Schutz zu nehmen, welche nur von Fehlern seines Compendium's sprechen, ohne durch den Zusatz, daß sie der Verfasser selbst sehr wohl gekannt habe, den durch ihr Absprechen gegen ihn leicht möglichen, aber ungerechten Verdacht der Unwissenheit, oder des hinter seinem Zeitalter zurücke geblieben Seyns, das für einen jeden

öffent-

öffentlichen Lehrer entehrend ist, zu beseitigen; theils um die nächste Veranlassung des gegenwärtigen Handbuches dem Leser vorstellig zu machen. Der Verfasser desselben gab schon im Jahre 1799 Sex mathematici Argumenti Dissertationes (b. Göbhardt zu Bamberg und Würzburg) bloß zu dem Zwecke heraus, um diejenigen Hauptmaterien der Elementar, Arithmetik und Elementar, Algebra faßlich und gründlich erörtert seinen Schülern in die Hände zu geben, welche in dem Trentel'schen Compendium entweder gar nicht, oder doch nicht in derjenigen systematischen Ordnung, und mit derjenigen durchgängigen Bestimmtheit und Schärfe in der Demonstration vorkommen, deren sie fähig sind, und mit der sie auch Anfängern vorgetragen werden müssen, wenn für sie die Mathesis wirklich eine Bildungsschule zum bestimmten und gründlichen Denken werden soll.

Der Grund aber, warum damahls nur ein Abgregat von Dissertationen, und nicht

vielmehr entweder das ganze Trentel'sche Compendium umgearbeitet, oder ein eigenes vollständiges Lehrbuch herausgegeben wurde, lag bloß darin, weil einer neuen Auflage die beträchtliche Mehrheit der im Stahel'schen Verlage noch vorräthigen Exemplaren, und der Einführung eines neuen Lehrbuches theils der Mangel der zur Ausarbeitung desselben nöthigen Muße, theils der Wunsch entgegen stand, daß der wegen seines Scharfsinnes in der Mathesis, und musterhaften Compendienstyls sehr geschätzte Hr. Professor Trentel selbst noch ein neues Compendium für die hiesigen Schulen schreiben möge. Da nun aber inzwischen die Realisirung jenes Wunsches durch die hartnäckige Kränklichkeit des Hrn. Professor's immer mehr hinausgeschoben, und endlich durch seinen am 30sten Jenner's 1804 erfolgten Tod ganz unmöglich gemacht wurde, auch die Stahel'sche Buchhandlung zur zweyten verbesserten Auflage des Trentel'schen Lehrbuches sich nicht verstehen mochte, obgleich nur noch wenige Exemplaren vom ersten Verlage

vor-

vorräthig waren: so entschloß sich der Verfasser des Gegenwärtigen, die Lehren der Elementar-Arithmetik in Verbindung mit der Elementar-Algebra unter seinem eigenen Namen, als ein Handbuch zunächst für seine Schüler in Druck zu geben; und dieser Entschluß war ihm um so leichter, je gewisser er wußte, daß die Ausführung desselben einem Bedürfnisse seiner Schüler abhelfe, und je erfreulicher und aufmunternder für ihn der gehaltvolle Beyfall war, welcher seinen oben genannten sechs mathematischen Abhandlungen in Ansehung der ihnen zuerkannten Deutlichkeit, Präcision, und der strengen systematischen Anordnung der Gegenstände, sammt der Schärfe in den Demonstrationen in dem 135ten Stücke der Ergänzungsblätter zur Allg. Literat. Zeitung vom Jahr 1800 nebst dem Wunsche des Hrn. Recensenten gegeben wurde, daß diese Abhandlungen entweder in einer neuen Ausgabe des Trentel'schen Compendiums, oder in einem eigenen Lehrbuche möchten eingerückt worden seyn, um ein vollstän-

diges Ganzes zu haben. Die Quellen, die hiers bey der Verfasser benützte, sind wieder größtens theils dieselben, deren er sich auch schon in seinen Dissertationen bediente, und die er in der Vorrede zu denselben ausführlich, und auch in diesem Handbuche an mehreren Stellen aufs neue angeführt hat, nämlich die Schriften des Hrn. Hofr. Käſtner*), Schulz, Lorenz, Vega, Clemm, de la Caille, Büria, Euler, Wucherer, Huberti, und ins besondere der sowohl öffentliche als Privatunterricht des seel. Hrn. Prof. Trentel, welchen Männern insgesammt, als seinen Lehrern in der Matheſis hier der Verf. den wärmsten Dank entrichtet. Aus der Art und Weise aber, wie er sie benützt hat, wird hoffentlich ein jeder Sachkundige und Gerech-

---

*) Von welchem Hr. Wucherer in seinen zu Carlsruhe 1782 herausgegebenen Anfangsgründen der Arithmetik, Geometrie ꝛc. S. 562 mit Rechte sagt: „Unentschlossen war die Natur, als sie Teutschland, Göttingens Zierde, den Hrn. Hofr. Abrah. Gotth. Käſtner schenkte, ob sie uns einen Euklid, oder Rabener geben wollte. — Sie gab uns beydes.“

rechtigkeitsliebende Kritiker eben so ersehen, daß der Verf. überall mit strenger Prüfung und eigenem Nachdenken zu Werke gegangen sey, als aus dem obigen redlichen Geständnisse den Schluß ziehen, daß desselben Sache nicht gewesen, sich fremdes Eigenthum anzumassen. Vielmehr war und ist seine Denkweise bey der Herausgabe dieses Handbuches ganz von der Art, wie auch Hr. Wucherer sie in der Vorrede zu seinen Anfangsgründen der Arithmetik, Geometrie ꝛc. S. XII als die Seinige in folgender Stelle beschrieben hat: „Kästnern und Clemmen (der Verf. setzt die obengenannten Authoren hinzu) darinnen genützt zu haben, achte ich mir für keine Schande. Männer vom Range unter den Gelehrten, sagen über die mathematischen Arbeiten eines Ausländers: „ist nach dem Verdienste des Erfindens nicht das Verdienst des Einkleidens und Verbreitens das nächste?" (Allg. Deutsch. Biblioth. 21ten Bandes 1rtes St. p. 371). Weit entfernt von dem lächerlichen Stolz, mir diese Stelle in ihrer ganzen Ausdehnung

anzu-

anzupassen, sag' ich freymüthig: Wenn ich durch die Ausgabe dieser Anfangsgründe einiges Wohlwollen des Publicums, vorzüglich meines Vaterlandes erhalten sollte, so will ich darauf, bloß aus dem Grunde einigen Anspruch machen, weil ich viele, aus anderen Schriftstellern (mit strenger Prüfung) gesammelte Wahrheiten deutlich, der Absicht der Zuhörer gemäß vorgetragen, in einen ihrer Lage angemessenen Zusammenhang gebracht zu haben hoffe.

Den Gang betreffend, nach welchem dieses Handbuch abgefaßt ist; so ist derselbe der nämliche, den der Verfasser auch schon während seines Lehramtes am Gymnasium in der Mathesis eingehalten hat. Denn aus objectiven Gründen ist er überzeugt, daß dieser Gang wissenschaftlich, und aus einer mehrjährigen Erfahrung weiß er, daß derselbe auch der Fassungskraft der Anfänger so ganz angemessen sey, daß ihnen das Studium der Mathesis zum Vergnügen werde. Wenigstens

zählte ein jeder vormahlige philosophische Gymnasiums-Cursus, in welchem der Verf. die Elementar-Arithmetik und Algebra nach diesem Gange erklärte, der Subjecte mehrere, welche mit unermüdetem Fleiße dem Studium der Mathesis, so wie den übrigen vorgeschriebenen Lehrgegenständen oblagen, und sich am Ende freuten, die strengen Prüfungen aus den jährigen Sparten pro Primatu et prima Classe zu bestehen, um sich, nebst der inneren, bleibenden Belohnung, welche das Bewußtseyn gründlich erworbener Erkenntnisse überhaupt gewährt, auch noch der äußeren, von dem „dicier et monstrarier: Hic est" abhängigen würdig zu beweisen. Männer vom ersten Range aus unserer Stadt können und müßen dieß bezeugen, welche entweder in der Qualität fürstlicher Schul-Commissarien jenen Final-Prüfungen beywohnten, oder auch ohne diese Qualität die sowohl monathlichen, als Final öffentlichen Disputationen unserer Studenten mit ihrer Gegenwart beehrten. Hierbey war nur dieß einzige

zu bedauern, daß der, in den Elementen der reinen und angewandten Mathematik gründlich unterrichtete Gymnasiast nach seinem Uebergange zur Universität keinen besondern äußeren Sporn mehr fand, das Studium der Matheſis noch weiters zu verfolgen. An dieſem Mangel des äußeren Sporns aber war vorzüglich nur der Umſtand ſchuld, daß unſer vormahliger Staat weder ein vollkommener Handels- noch ein Kriegsſtaat war, zu deſſen Zwecken man eine vollendete Kenntniß der Mathematik für nothwendig erachtet hätte. Dem zu den Univerſitätsſtudien übergetretenen Gymnaſiaſten blieb alſo, als Triebfeder, das Studium der Matheſis bis zur Vollendung fortzuſetzen, weiter Nichts übrig, als nur das Intereſſe, welches er dafür vom Gymnaſium her mitgebracht hatte, und daß dieſes bey allen denjenigen, welche von Brodſorgen getrieben nur auf die recht baldige Erlernung ihrer academiſchen Brodwiſſenſchaften bedacht waren, um ſo mehr wieder frühzeitig erkalten mußte, je mehr ſie wußten, daß bey

ihren einstigen Gesuchen um öffentliche Anstellungen auf ihre mathematische Kenntnisse eben keine sonderliche Rücksicht aus dem obengenannten Grunde würde genommen werden, liegt zu Tage. Daher denn zugleich eben die Erscheinung, daß vorzüglich nur unter denjenigen, welche sich nach ihrem Austritte aus den Gymnasiumsschulen dem Clericate widmeten, als wohin sie durch ein altes mit dem Primate verbundenes fürstliches Privilegium bey der nächsten Aufnahme sogleich den freyen Zutritt hatten, das Studium der Mathesis noch fortgesetzt wurde *), so gewiß dieß auch die übrigen Academi-

*) Aus der Luft gegriffen und wahrhaft albern ist daher der Gedanke, als sey das Studium der Mathesis in Würzburg deßwegen nicht zum höchsten Grade der Cultur gekommen, weil es kein Mittel gewesen, in den geistlichen Stand zu kommen. Denn gerade die Geistlichen waren es, welche zu Würzburg die Mathesis sowohl in Schulen als in Schriften gründlich pflegten, und für sich in diesem Fache immer weiter fortzurücken bestrebt waren, wenn sie auch bey ihrem öffentlichen Vortrage für Anfänger immer nur auf die Elemente zurücke geworfen waren, und die Kanäle entweder nicht kannten, oder nicht benützen mochten, sich als treff-

demiker in einer gröſseren Menge, als es wirklich geſchah, gethan haben würden, wenn ihnen davon äußerlich eine Ausbeute zu hoffen geweſen wäre. Dieß ſonach einzig der Grund, warum es mit dem Studium der Mathesis vormahls bey uns zu derjenigen Höhe nicht kam, welche die jetzige, vom Intereſſe für die Wiſſenſchaften überhaupt ganz entflammte, ſo wie für das Gute aller Art raſtlos thätige Regierung Maximilian's des Weiſen demſelben wünſcht, und ihm wirklich zu geben kein Opfer zu groß findet. Und nun mögen unpartheyiſche Männer ſelbſt beurtheilen, was von dem Vorwurfe zu halten ſey, welcher in dem zweyten Theile der ſogenannten Reviſion des würzburgiſchen Schul-

---

treffliche Mathematiker öffentlich ausposaunen zu laſſen. So hat z. B. unſer ehemahliger Hr. Prof. Burkhäuſer ſchon längſt eine vollſtändige Phyſik zum Drucke fertig liegen, die ihrem mathematiſchen Theile nach ſich gewiß mit jedem anderen Werke dieſer Art meſſen darf; ob er gleich bis dato keinen Verleger dazu finden konnte, weil der Abdruck koſtſpielig iſt, und er den ſchnellen Abſatz, den dieſe Herren wünſchen, nicht garantiren kann.

Schulwesens von Hrn. Andreas Riel in der S. 50 vorkommenden summarischen Schilderung unserer vormahligen Gymnasiums, Lehranstalt überhaupt, mitunter auch der Verfassung des philosophischen Curses an demselben Gymnasium gemacht wird; nämlich daß man allda 2 Jahre lang atqui und ergo declamiren gelernt habe. Herr Riel läßt zwar die ganze auf der citirten Seite vorkommende schneidende Definition unserer vormahligen Gymnasiums-Schulen, wovon jener Passus nur ein Glied ist, von einem Anderen herstammen. Inzwischen hat er sich doch selbst für ihren Inhalt dadurch verantwortlich gemacht, daß er ihr die Stelle vorausschickt „Ueberläßt man sich beym Anblicke desselben (des von Hrn. Riel gegebenen Hauptumrisses des Gemäldes, das unsere Gymnasiumsschulen in literarischer Hinsicht nach ihm darbiethen) den Gefühlen seines Unwillens, so wird man geneigt, die Definition nicht zu schneidend zu finden, die ich einmahl von ihnen machen hörte." Und nun fragt der

Verfasser des Gegenwärtigen, weit entfernt, mit Hrn. Riel, als seinem ehemahligen Schüler, hier öffentlich zu rechten, ihn nur dieß einzige, ob er sich denn auch noch wohl alles dessen zu erinnern wisse, was seit der 1794 geschehenen Organisation unserer ehemahligen philosophischen Gymnasiumsschulen zu den Lehr- und Lerngegenständen derselben gehörte, und wirklich auch von den Lehrern so weit vorgetragen wurde, als das Schulgesetz es erlaubte? Kann er sich dessen erinnern, so wird er zugeben, daß nicht nur Logik theoretisch, und, so weit es möglich ist, auch practisch vorgetragen wurde, wo freylich das atqui und ergo immer wiederkehrte, so wie auch beym Mathematiker, wenn er die Eigenschaften des Zirkels demonstrirt, die Ausdrücke Sehnen, Durchmesser, Peripherie ꝛc. immer vorkommen, weil ohne sie die Demonstration nicht möglich ist: sondern auch die Mathesis, die philosophische Interpretation der Ciceronischen Bücher de officiis, das Studium der gesammten Physik und der practischen

Phi-

Philosophie fleißig und gründlich getrieben worden, und sonach jener obige Tadel grundlos und wirklich ungerecht sey. Oder will Hr. Riel wohl gar auch die Vorträge über die letzten Sparten ein „atqui und ergo declamiren“ nennen? Da müßte man ihn aber wahrhaft bedauern, indem er dadurch selbst, ohne es zu wissen, und zu wollen, die sachkundige Leserwelt zum Gedanken gegen sich verleiten würde, daß er sich für das Studium der Matheſis und das ohne sie nicht mögliche gründliche Studium der Physik, wie auch für das der Pflichtenlehre eben nicht sonderlich viel müsse interessiret haben, indem er sonst beydes nicht für ein bloßes atqui ergo declamiren hätte ausgeben können, weil er hätte wissen müssen, daß, (was auch in den Schulen von dem Lehrer stäts angemerkt wurde) das logische atqui schon der Natur der Matheſis zuwider sey, auf sie sonach gar nicht passe, und auch in der practischen Philosophie ohne vorhergehende Regel (die, in wie fern sie die höchste ist, doch

nicht wieder von einem atqui und ergo abhängig seyn kann) gar nicht statt finden könne. Denn das atqui drückt im Schlusse die Subsumtion aus, welche ohne Regel, worunter subsumirt würde, ins lächerliche fällt. Eben deßwegen setzt der Verf. des Gegenwärtigen ein solches fatales Wollen bey Hrn. Riel um so weniger voraus, je mehr er weiß, daß derselbe zur Zeit seiner Studentenperiode einen löblichen Eifer für das Studium der practischen Philosophie, so wie der logicalischen und metaphysischen Vorträge bewiesen habe, und je mehr Hr. Riel selbst öffentlich, obgleich nur verlorner Weise, trotz dem Widerspruche, in den er dadurch nur mit sich selbst geräth, einzugestehen scheint, daß in den alten philosophischen Gymnasiums, Schulen doch noch etwas mehr, als ein bloßes atqui ergo declamiren gelehrt worden sey. Denn auf der nämlichen Seite seiner Schrift gleich oben heißt es „und nachdem auf die Erlernung einer todten Sprache 8 — 9 manchesmahl 12 Jahre — verwendet sind, tritt nun der Jüng-

ling, ohne solide Vorbereitung, zur Philosophie über, die daher bey dem größten Theile leere Wortklauberey bleibt, während dem nur ein kleines Häufchen Eingeweihter ihr inneres Wesen ahnet, und in ihren Geist eindringt." Aber wie kann, — frägt nun der Verf. des Gegenwärtigen, und mit ihm gewiß jeder unbefangene Kritiker — durch ein bloßes atqui ergo declamiren das innere Wesen der Philosophie Einem auch nur zur Ahnung kommen, und wie kann dadurch der junge, auch noch so gute Kopf, sogar in den Geist der Philosophie eindringen? Weiß denn Hr. Riel nicht selbst schon längst, wenigstens erst aus der Schellingischen Schule, daß das Organ zur Ergreifung dessen, was das Wesen und den Geist der Philosophie ausmacht, schlechterdings nicht die, nur an der Krücke des atqui fortschreitende Reflexion seyn könne? oder will er etwa gar in obiger Stelle behaupten, daß jenes kleine Häufchen Eingeweihter ohne alles Zuthun des Lehrers bloß durch sich

selbst bis zum Wesen der Philosophie vorgedrungen sey? Aber da würde er etwas vorbringen, in Ansehung dessen ihm gewiß selbst alle diejenigen, die zu jenem kleinen Häufchen Eingeweihter nach ihm gehören mögen, laut widersprechen würden. Denn alle diese wissen sich sicherlich noch dankbarlich der rastlosen Bemühungen zu erinnern, durch welche in ihnen der Lehrer allererst den Funken zur Einsicht dessen, worauf es in aller Philosophie eigentlich ankömmt, hervorzulocken suchte; und werden es nun überhaupt dem Hrn. Riel gewiß nicht Dank wissen, daß er nur so etwas in die Welt schreiben mochte, wodurch unverdienter Weise ein schwarzer Flecken auch auf die alten Lehrer selbst geworfen wird, wenn auch Hr. Riel zehnmahl versichern sollte, daß seine Kritik nur der alten Anstalt gelte, ohne zu bedenken, daß selbst unter dieser letzten Restriction dieselbe, wenn sie nach ihrer ganzen Ausdehnung genommen wird, doch noch immer, wie aus dem obigen erhellet, das Gepräge der Wahrheit so wenig an sich trage, daß

sie vielmehr auch dann noch den Namen einer grundlosen und ungerechten verdiene. Doch den ausführlicheren Beweis dessen Anderen überlassend, kehrt der Verfasser wieder zu dem Hauptpuncte zurücke, auf den es ihm hier zunächst ankömmt, um nämlich in Ansehung des Ganges, der in diesem Handbuche herrscht, noch eine oder die andere zweckdienliche Bemerkung zu machen. Ueberzeugt, daß die vom leichtern zum schwereren fortschreitende, und so die Zuhörer allmählig in das Innere der abzuhandelnden Wissenschaft einführende Methode allein zu dem erzielten Zwecke der gründlichen Bildung hinführe, und die entgegengesetzte Methode, welche den Zuhörer auf den Boden der Wissenschaft mehr gewaltsam hineinwirft, als natürlich einführt, welche Methode man die Sturmlaufende nennen könnte, eben so verwerflich sey, als das Indifferenziren der Köpfe mit Steinmassen unter dem Namen der Festungen, die auch nur durch Sturm erobert werden können; versuchte der Verf. vorerst eine passende Einlei-

tung

lung in das Studium der Arithmetik, damit seinen Schülern vorerst das Verhältniß der Arithmetik zu den übrigen Theilen der Mathesis bekannt, und zugleich die Ueberzeugung zu Theile würde, daß die Arithmetik der allgemeinste Theil der gesammten Mathesis, mithin auf alle übrige Theile der Mathesis anwendbar, und sonach zu allererst abzuhandeln sey. Mit Vorbeygehen der vollständigen erklärenden Aufzählung der übrigen zum Gebiethe der Mathesis überhaupt gehörigen Theile, als welche Erklärung schicklicher allererst im Verlaufe der Wissenschaft selbst geschehen kann, begnügte sich der Verfasser, bloß noch die Terminologie der Mathematiker in der Einleitung zu erörtern, und schritt dann zum Vortrage der Elementar-Arithmetik selbst fort, und zwar so, daß er vorerst die sogenannten 4 Species derselben in ganzen Ziffernzahlen vortrug, um dann sogleich den Buchstaben-Calcul mit Hoffnung des Verstandenswerdens folgen lassen zu können. Der Grund, warum er nicht umgekehrt sogleich vom Buchstabens

staben-Calcul ausging, ist lediglich der, weil er die Methode, vom leichteren zum schwereren fortzuschreiten, vorzog. Der Literal-Calcul ist dem Anfänger eine wahre Hieroglyphe, wenn man ihm nicht Anfangs denselben in den Ziffer-Calcul zugleich mit übersetzt, als an welche Ziffern er schon mehr gewöhnt ist. Da erhellet aber sofort, daß er vorerst mit den Regeln der gemeinen 4 einfachen Rechnungsarten in ganzen Ziffernzahlen an sich, d. i. ohne alle Rücksicht auf die ihnen etwa anhängenden entgegen gesetzten Bedingungen, die durch + und — bezeichnet werden, bekannt gemacht werden müsse; wenn er dieselben etwa nicht schon selbst gründlich weiß, so gewiß es übrigens auch seyn mag, daß nur durch den Buchstaben-Calcul die Natur der Zahlensysteme überhaupt dargestellt werden könne, und dagegen die hier zuerst erklärten Regeln nur für das decadische Zahlensystem gelten. Und nun eben dieses Einer von den Gründen mit, wegen welcher der Verfasser dem anonymen Entwurfe der gesammten Mathematik, der in diesem Jahre

und zwar erst ohnlängst in der hiesigen Göb-
hardt'schen Buchhandlung erschien, seinen Bey-
fall nicht ganz geben kann. Denn, was die
Arithmetik betrifft, so ist darin gerade
die Buchstaben-Rechnung als erstes
Glied der Eintheilung der niederen Arith-
metik, und als zweytes die Zahlen-Rech-
nung angesetzt, und zwar noch obendrein so,
daß die von der Buchstaben-Rechnung ge-
gebene Erklärung nach dem Dafürhalten des
Verfassers mit dem logischen Definitions-Ge-
setze „definitio non sit angustior definito"
nicht bestehen kann. Denn von der Buchstaben-
Rechnung heißt es: „Die Wahrheiten der-
selben sind ganz allgemeine arithmeti-
sche, die für jedes Zahlensystem gel-
ten. Mit Berechnung hat sie es also
nicht zu thun, sondern bloß mit Ent-
wickelung allgemeiner arithmetischer
Sätze." Da nun in eben diesem Abrisse gleich
Anfangs der Arithmetik überhaupt zum Ob-
jecte die discrete Größe angewiesen; sie selbst

sonach

sonach für eine Lehre der discreten Größe erklärt wird: so geht der vorige Satz, wenn man statt des in ihm vorkommenden Ausdrucks arithmetisch gehörig substituirt, in diesen über „die Buchstaben-Rechnung hat es nicht mit Berechnung, sondern bloß mit Entwickelung allgemeiner arithmetischer d. i. solcher Sätze zu thun, deren Object die discrete Größe ist. Nun aber ist es doch schon vorlängst bekannt, daß das Object der Sätze der Buchstaben-Rechnung die Größe überhaupt sey, da man ja unter den Buchstaben eine jede mögliche Größe verstehen kann; die aus dem Entwurfe angeführte Erklärung der Buchstaben-Rechnung ist sonach zu enge, mithin logisch falsch. — Ein Gleiches gilt von der in diesem Entwurfe gegebenen Erklärung der Algebra, welche darin als erster Theil der höheren Arithmetik aufgeführt wird. Denn wenn es heißt: „diese (die Algebra) bestimmt arithmetisch die Größe durch Gleichungen", und man nimmt wieder die vorige Substitution vor; so

resultirt der Satz: „die Algebra bestimmt arithmetisch d. i. nach Sätzen, deren Object die discrete Größe ist, die Größe durch Gleichungen. Würde nun der hier zuletzt gesetzte Begriff der Größe ganz allgemein genommen: so erhellet, daß dann in der Algebra, da in ihr, jenem Satze zufolge, aus der Natur der discreten Größe die Eigenschaften der Größe überhaupt, mittelst der Gleichungen hergeleitet werden müßten, gegen das ewig wahre Gesetz der Logik stäts gefehlt werden müßte; „a particulari ad universale non valet consequentia“. In jenem Satze müßte sonach, um dieser Unlogicalität auszuweichen, diejenige Größe, die durch Gleichungen zu bestimmen ist, auch nur als eine discrete verstanden werden. Aber dann würde nur eine neue Unlogicalität zum Vorscheine kommen, nämlich die Erklärung der Algebra würde dann offenbar zu enge; da bekanntlich der algebraische Calcul auf Größen überhaupt geht. Ferner hält der Verfasser dafür, daß die in dem erwähnten Entwurfe gleich Ein-

gangs aufgestellte Abtheilung der reinen Mathesis in die Arithmetik, als Lehre der discreten Größe, und in die Geometrie, als Lehre der stätigen Größe zu schnell gehe, und eben dieses zu schnell gehen das πρωτον ψευδος des Iten Theils der Tabelle sey. Denn im Begriffe der Größe in abstracto (d. i. weggesehen von bestimmten Dingen, denen die Größe zukömmt), welche das Object der reinen Mathesis ist, kann noch weiters auch von der Qualität der Größe, zufolge welcher sie entweder eine discrete oder stätige ist, abstrahirt werden, und man erhält dann den Begriff der Größe ganz in abstracto genommen, dem der Begriff der Größe, zwar noch immer in abstracto, aber doch nicht ganz in abstracto, sondern mit Hinsicht auf ihre Qualität genommen gegenüber steht; wo sich dann die schon bey Hrn. Schulz vorkommende nächste Eintheilung der reinen Mathesis in die reine allgemeine, und reine besondere von selbst darbiethet, so wie die Einsicht leicht ist, daß die Lehren der

reinen allgemeinen Mathesis nothwendig auch von jeder besonderen Größe gelten müßen. Wird nun weiter gezeigt, was der Verf. des Gegenwärtigen in seiner Einleitung nach seiner eigenen Ansicht wirklich gezeigt zu haben glaubt, daß die reine allgemeine Mathesis nichts als Arithmetik seyn könne, während dem die reine besondere Mathesis nur als Geometrie d. i. als Wissenschaft vom Raume gelten kann, wie dieses letztere wieder schon Hr. Schulz vortrefflich gezeigt hat; so ist dann zwar auch, als der einzig mögliche zweyfache Theil der reinen Mathesis die Arithmetik und Geometrie festgesetzt, aber zugleich doch auch das Princip der Anwendbarkeit der Arithmetik nicht nur auf discrete, sondern auf alle mögliche Größen nachgewiesen, und dadurch die Einheit auf dem Gebiethe der Mathesis begründet. Diese Anwendbarkeit der Arithmetik nicht nur auf discrete, sondern auch auf stätige Größen behauptet sicherlich selbst auch der ungenannte Hr.

Verf.

Verfasser jenes Entwurfes, da Er ja selbst darin mit Rechte erklärt, daß nur durch die Verbindung der Arithmetik und Geometrie die Trigonometrie entstehe. Aber wenn nun die Frage nach dem Princip der Möglichkeit dieser Anwendung entsteht; wie sie denn nothwendig einem jeden entstehen muß, der, wie dieß bey diesem Entwurfe wirklich der Fall ist, zwischen der Arithmetik und Geometrie eine contradictorische Entgegensetzung dadurch aufgestellt findet, daß beyde als die nächsten Divisionsglieder (die sich stäts nach der Forderung der Logik contradictorisch entgegen gesetzt seyn müssen) der reinen Mathesis, und zwar die Arithmetik als Lehre der discreten, und die Geometrie als Lehre der stätigen Größe angesetzt werden: so scheint dem Verfasser, wenn man nicht den vorhin verzeichneten anderen Gang einschlägt, eine zulängliche Antwort auf diese Frage eben so unmöglich, als auf die Frage überhaupt, welches das Princip der Anwendbarkeit dessen, was das Eigenthümliche des einen

von

von zwey contradictorisch entgegengesetzten Gliedern = A ausmacht, auf das andere = non A sey? — Die in dem Entwurfe aufgestellte Eintheilung der reinen Mathesis geht sonach zu schnell, und die fatale Folge dessen ist, daß zwischen der Arithmetik und Geometrie eine solche Kluft eröffnet wird, daß man nur per saltum von jener auf diese kommen kann.

Aus diesen Gründen nun konnte der Verfasser des Gegenwärtigen mit dem erwähnten Entwurfe in Ansehung des darin für die Arithmetik *) verzeichneten Ganges, und der darauf

be-

*) Die Geometrie betreffend: so leistet a) die in dem Entwurfe gegebene Erklärung des Objectes derselben „daß es nämlich die stätige Größe sey" dem Verfasser deßwegen nicht Genüge, weil sie zu weit ist. Denn unter dem Begriffe der stätigen Größe steht die extensiv- und intensiv stätige Größe. Die Geometrie aber handelt nur, wie aller Welt bekannt ist, von der extensiv stätigen Größe, und zwar wieder nur von der einen Art der extensiv stätigen Größe, nämlich vom Raume, indem die Zeit, als die andere extensiv stätige Größe unter dem Bilde einer Linie, die eine Dimension des Raumes ist, vorgestellt wird. b) wird, wenn der Entwurf die Geometrie vorerst in die niedere, und höhere,

und

beziehlichen Begriffsbestimmungen nicht ganz zufrieden seyn. Ob er hierbey richtig gesehen, oder sich getäuscht habe, überläßt er einzig der Entscheidung wahrheitsliebender Kritiker. So viel weiß er, daß er die Rede auf diesen Entwurf nicht zu dem Zwecke lenkte, um nur seinen Tadel gegen denselben vorzubringen; sondern einzig nur in der Absicht, um öffentliche

Rechen-

---

und dann die niedere wieder in die Longimetrie, Planimetrie und Stereometrie abtheilt, nach dem Dafürhalten des Verfassers eine Condivision als eine Subdivision
F aufgeführt, und zwar noch obendrein in verkehrter Ordnung. Denn das Principal-Fundament der Abtheilung der Geometrie ist offenbar die nur dreyfache Dimension des Raumes, wodurch denn zunächst die eine Hauptdivision der Geometrie entsteht 1) die Lehre von den Linien, 2) von den Flächen, 3) von den Körpern. Sieht man dann zweytens auf die Methode, diese 3 Theile abzuhandeln: so entsteht die zweyte Division in die niedere und höhere Geometrie, welche zweyte Division auf einen jeden der drey Theile der ersten Hauptdivision Beziehung hat, so daß, wenn doch eine Subdivision eingehalten werden soll, die zweyte Division allein als Subdivision gelten kann. Doch der Verf. enthält sich hier einer weiteren Erklärung dessen, weil er hier nicht von dem Gange der Geometrie, sondern nur der Arithmetik zu sprechen hat.

Rechenschaft darüber zu geben, warum er den in demselben für die Arithmetik verzeichneten Gang sammt manchen Begriffsbestimmungen nicht selbst auch eingehalten hat, so wie er ihn auch für die Zukunft so lange nicht einhalten wird, bis er eines Besseren belehrt wird. Für dieses Belehrtwerden, wozu aber nur Gründe nothwendig sind, verspricht der Verf. eben so sehr seinen Dank, als für jeden anderen gründlichen Wink zur Verbesserung eines oder des anderen Haupt-Punctes in Ansehung des übrigen Ganges im Handbuche, und seines Inhaltes. Der Verf. findet in Betreff desselben keine andere Bemerkung mehr nothwendig, als a) daß, ob er gleich selbst wohl weiß, daß die Aufgaben der sogenannten practischen Rechenkunst eigentlich in die angewandte Mathesis gehören, er dieselben doch, der alten Sitte gemäß, in sein Buch der reinen Arithmetik aufgenommen habe, um die Theorie angenehmer, und auch sogleich nützlich zu machen, b) daß, wenn er das Verfahren in der Multiplication und Division

vision der Sexagesimal-Brüche nur durch Beyspiele erläutert hat, er doch selbst zugleich auch wohl wisse, daß sich von der Beweisart der Richtigkeit des Verfahrens bey der Multiplication und Division der Decimal-Brüche auch dort eine Anwendung machen lasse.

Wohl ihm nun, wenn er nach seiner einzig wahren Absicht „zur Beförderung des mathematischen Studiums unter der an der vaterländischen Universität studierenden Jugend nach den Höchsten Wünschen Seiner Churfürstlichen Durchlaucht Maximilian's des Weisen auch das seinige nach Kräften beyzutragen," beurtheilt, und durch das öffentliche Zeugniß wahrheitsliebender Recensenten, diese Absicht nicht verfehlt zu haben, zu ferneren Arbeiten noch mehr aufgemuntert wird, als er es schon wirklich ist.

Würzburg den 15ten des Julius
1804.

Andreas Metz,
Dr. und Prof.

XXXVI

Nachschrift.

Die am Ende bemerkten Verbesserungs-Puncte wird der Leser die Güte haben, sammt den übrigen, die etwa der Aufmerksamkeit des Verfassers entgangen sind, wie dieß bey mathematischen Correcturen leicht der Fall seyn kann, an Ort und Stelle einzutragen.

Inhalt

Inhalt.

Einleitung.

I. Vom Verhältnisse der Arithmetik zu den übrigen Theilen der Mathesis, und von ihrer Abtheilung S. 1

II. Von der Terminologie der Mathematiker 5

Erstes Kapitel.

Von den Stamm- oder einfachen Rechnungsarten in ganzen Zahlen, sammt der Lehre von der Abmessung ganzer Zahlen 10

Zweytes Kapitel.

Von den Stamm- oder einfachen Rechnungsarten in gebrochenen Zahlen 80

Drittes Kapitel.

Von der Erhebung der Größen zu Potenzen, und Ausziehung der Wurzeln, sammt dem Calcul mit Wurzelgrößen 114

Viertes Kapitel.

Von den Verhältnissen, und Proportionen.

I. Theil. Vorläufige Lehre von den zur Elementar-Algebra gehörigen Problemen, und Gleichungen 157

II. Theil. Von Verhältnissen, und Proportionen überhaupt, und den arithmetischen ins besondere S. 196
III. Theil. Von geometrischen Verhältnissen, und Proportionen 207
Anhang. Von der goldenen Regel ins besondere 222

Fünftes Kapitel.

Von den Progressionen.

I. Von der arithmetischen Progression 245
II. Von der geometrischen Progression 254

Sechstes Kapitel.

Von den Logarithmen.

A) Theorie der Logarithmen 273
B) Anwendung der Logarithmen 310
a) bey denjenigen Aufgaben in denen die Unbekannte als Exponens vorkömmt 311
b) bey der Zinsen-Rechnung nach dem Leibnitzischen Calcul 314

Schluß, Anhang zum Ganzen.

Von den Permutationen, und Combinationen 340

Ein-

umgekehrt, alles, was vermehrt und vermindert werden kann, ist ein Quantum. Dagegen wird die Qualität (Beschaffenheit) eines Dings durch das Mannigfaltige an demselben, und die Art und Weise der Verknüpfung desselben zur Einheit bestimmt.

4. Gleichartige Dinge, die einerley Quantität haben, heissen gleich; die einerley Qualität haben, ähnlich, die gleich und ähnlich sind, congruent.

5. Die Wissenschaft von den Größen (scientia quantorum) heißt Mathesis.

6. Die Wissenschaft von den Eigenschaften der Größen, in abstracto d. h. so erwogen, daß man auf keine bestimmte Naturobjecte Rücksicht nimmt, heißt reine Mathesis (Mathesis pura). Ihr entgegengesetzt ist die angewandte Mathesis (adplicata s. mixta), welche die Principien der reinen Mathesis anwendet, um die fragliche Quantität bestimmter Naturobjecte zu bestimmen. Jene ist Mathesis Κατ' Εξοχην, und wird daher immer verstanden, wo von Mathesis schlechthin die Rede ist. Man nennt jene auch die theoretische, diese aber practische Mathesis. (Das Wort practisch in der weiteren Bedeutung genommen).

7. Die Quanta, rein betrachtet, sind in Ansehung ihrer Quantität (3) entweder discrete — abgesonderte —, oder stätige (continua). Jene

sind

sind solche, deren gleichartiges Mannigfaltige entweder gar nicht verbunden ist, oder doch nur so, daß zwischen den Theilen Lücken sind, mithin nicht das Ende des vorhergehenden Theiles sofort der Anfang des folgenden ist. Das Gegentheil findet bey stätigen Größen Statt.

8. Man erwägt also die Größen ganz in abstracto, wenn man weder auf bestimmte Naturobjecte, noch auf die Qualität der Größen Rücksicht nimmt. Der Theil der reinen Mathesis, welcher von den Größen, ganz in abstracto genommen, handelt, heißt reine allgemeine Mathesis, im Gegensatze der reinen besonderen Mathesis, welche auf die Qualität der Größen, rein betrachtet, Rücksicht nimmt.

9. Bey der Größe, ganz in abstracto (8) genommen, kömmt Nichts zu erwägen vor, als die Art und Weise ihrer Entstehung. Diese aber besteht in der Verknüpfung (Addition) der Einheit mit sich selbst (3); also ist die Addition das Object der allgemeinen reinen Mathesis.

Durch die Addition einer Einheit zu sich selbst aber entsteht eine Vielheit gleichartiger Einheiten, d. i. eine Zahl (Numerus est collectio vnitatum homogenearum): also ist die Zahl das Object der reinen allgemeinen Mathesis. Die Wissenschaft von Zahlen aber heißt Arithmetik (von αριθμος —

Numerus): also ist die reine allgemeine Mathesis die Arithmetik.

Anmerkung.

Herr J. Schulz weist in seinen Anfangsgründen der reinen Mathesis (Königsberg 1790 §. 9.) der reinen allgemeinen Mathesis als Object an a) die allgemeine Addition b) die allgemeine Subtraction c) die Arithmetik. Allein die Subtraction setzt schon die Addition voraus, wie von selbst erhellet, und die Addition ungleicher Größen setzt wieder diejenige Addition voraus, die wir in §. 9 als den einzigen ursprünglichen Modus, Größen zu erzeugen, aufgestellet haben. Daher können wir hier dem H. Schulz nicht beytreten.

10. Da die Arithmetik der allgemeinste Theil der reinen Mathesis ist; so folgt, daß die Wahrheiten derselben auf alle übrige Theile der Mathesis *) anwendbar seyen, und sie vor allen übrigen beym Studium der Mathesis den Anfang machen müsse.

11.

---

*) Die übrigen Theile der Mathesis sind 1) die reine besondere Mathesis, d. i. die Geometrie — Wiss. enschaft von den Eigenschaften des Raumes — wie dieß in der Ersten meiner sechs mathematischen Dissertationen §. 9 (Bamberg und Würzburg bey Göbhardt 1799)

11. Eine Gleichung (aequatio) ist ein doppelter Ausdruck der nämlichen Größe, in wiefern man auf die Gleichheit (4) beyder Ausdrücke sieht. — Die Eigenschaften der Zahlen, von denen die Arithmetik handelt, können nun entweder eingesehen werden, ohne daß man dazu der Gleichungen nöthig hat, oder nur durch Gleichungen. Daher zerfällt die Arithmetik in die niedere — (Elementar-Arithmetik) — und in die höhere — (Arithmetica sublimior — Arithmetica coſſica, oder Algebra). Die Algebra ist wieder nach Verschiedenheit der Gleichungen selbst entweder elementar, oder höhere Algebra, was sich aber erst an Ort und Stelle (206) deutlich erklären läßt, wo man dann auch zugleich den Grund für den Titel dieses Buches vollständig einsehen wird.

II.

Von der mathematischen Terminologie.

12. Die Haupttiteln der mathematischen Lehrart sind Definitionen, Axiomen, Postulate, Theoreme, Probleme, Demonstrationen, Corollarien, Hypothesen, Lemmate, und wo sie zweckdienlich sind, Scholien.

1799) gezeigt ist. 2) Die gesammte angewandte Mathesis, deren Haupttheile ebenfalls in jener Dissertation §. 14 angegeben sind.

13. Eine Definition (Erklärung) ist die Angabe des bestimmten Begriffs, welchen ein Wort beständig bezeichnet. Z. B. Zahl ist die Vielheit gleichartiger Einheiten.

14. Theoretisch heißt ein Satz, welcher aussagt, daß Etwas sey, oder nicht sey; im Gegentheile practisch, (dieses Wort in der weiteren Bedeutung genommen) in wie fern er aussagt, daß etwas geschehen solle, oder könne. Ein theoretischer Satz, der unmittelbar und zwar intuitiv einleuchtend ist, so daß er keiner Ableitung aus einem höheren bedarf, noch derselben fähig ist, heißt Axiom. Z. B. Von einem Punkte zum andern ist nur eine einzige gerade Linie möglich. Zwey gerade Linien schließen keinen Raum ein. Das Axiom unterscheidet sich vom Acroam, als welches einen theoretischen, unmittelbar — aber discursiv — gewissen Satz bezeichnet.

15. Ein unmittelbar, und intuitiv gewisser praetischer Satz, der keiner weiteren Ableitung bedarf, noch fähig ist, heißt Postulat (Forderungssatz). Z. B. Eine gerade Linie kann ohne Ende verlängert werden. Von einem Puncte zum andern ist immer eine gerade Linie möglich.

16. Theorem (Lehrsatz) ist ein theoretischer Satz, dessen Wahrheit aus anderen Sätzen abgeleitet (bewiesen) werden muß, oder doch ableitbar (beweisbar) ist.

17. Der intuitive Beweis heißt Demonstration; die Möglichkeit derselben beruht auf unmittelbar gewissen Sätzen, dergleichen die Axiomen und Postulate sind. Ferner geht der Demonstration die Construction voraus, d. i. die Anordnung alles dessen, was zur intuitiven Darstellung dessen, was zu beweisen ist, und zur Beweisführung selbst erforderlich ist.

18. Die Demonstration heißt direct, wenn sie geradezu (directe) aus der Natur der Sache zeigt, daß und warum etwas wahr sey. Dagegen indirect, oder apagogisch (demonstratio ex absurdo) wenn sie die Falschheit des contradictorischen Gegentheils des zu erweisenden Satzes zeigt, und dann auf die Wahrheit eben des zu erweisenden Satzes schließt. Ferner heißt sie progressiv, wenn sie von den Gründen zu den Folgen fortgeht, regressiv aber, wenn sie von den Folgen rückwärts auf die Gründe geht.

19. Problem (Aufgabe) ist ein practischer Satz, der einen Beweis fordert, oder doch wenigstens eines Beweises fähig ist. Z. B. Eine gegerade Linie in zwey gleiche Theile zu schneiden. Hier muß erstens die Art und Weise, das Geforderte zu Stande zu bringen, gelehrt, und dann zweytens auch die Richtigkeit dieser Methode demonstrirt werden. Die Construction, die der

Lösung des Problems vorhergeht, ist die intuitive Darstellung des Ganges, der zur Lösung des Problems einzuhalten ist.

20. Corollarium (Zusatz) ist ein Satz, der sich aus einem anderen von selbst ergiebt.

21. Hypothesis ist 1) ein Wahlsatz d. i. ein Satz, durch den Etwas sich nicht widersprechendes willkührlich gewählt wird. 2) die Bedingung bey einem Lehrsatze, oder bey einer Aufgabe. *

22. Lemma (Lehnsatz) ist ein anderswoher in der Absicht entlehnter Satz (propositio subsidiaria), um einen folgenden zur abzuhandelnden Wissenschaft gehörigen Satz beweisen zu können.

23. Scholion (Anmerkung) ist die Anführung dessen, was zur größeren Verdeutlichung, oder Bestättigung des bereits Gesagten und Bewiesenen dient. Die Scholien gehören also nicht zu den wesentlichen Theilen der mathematischen Lehrmethode, und es ist daher ein Fehler, wenn man sich im Systeme der Mathesis auf sie, wie auf Hauptheile des Ganzen beruft.

An=

*) In der Naturlehre ist Hypothese ein jeder beliebig angenommene Erklärungsgrund dessen, was zu erklären ist, ohne daß man seinen wahren Grund weiß.

Anmerkungen. 1. Die Kenntniß dieser zeither erklärten Terminologie der Mathematiker ist nicht schon so fort auch die Kenntniß der mathematischen Methode, d. i. des Ganges, den die Mathematiker einhalten, um die Lehre von den Eigenschaften der Größen vollständig und ächt wissenschaftlich zu Stande zu bringen. Diese Methode muß, und kann man vielmehr nur durch das Studium der Mathesis selbst kennen lernen. Die zeither erklärte Terminologie macht nur das Außenwerk derselben aus; ihr Geist aber kann Niemanden anders, als durch das ernste Studium der Mathesis selbst bekannt werden.

2. Vom Nutzen der Mathesis sprechen wir in der Einleitung nichts, weil 1) derjenige, der dieselbe noch nicht studiret hat, den Grund aller, desfalls aufzustellenden Behauptungen nicht deutlich und vollständig einsehen kann; und wer sie gründlich studiret hat, den Nutzen derselben von selbst einsieht, 2) weil die Anpreisung einer Wissenschaft von Seiten ihres Nutzens eine lohnsüchtige Denkart voraussetzt und unterhält, welche gerade der Tod alles freyen, und edlen Emporstrebens des Geistes in Wissenschaften ist. Auf die Verächter der Mathesis paßt der Regel nach der Spruch: quod ignorant, blasphemant.

Der Elementar-Arithmetik

Erstes Kapitel

von den Stamm-Rechnungsarten in ganzen Zahlen, sammt der Lehre von der Abmessung ganzer Zahlen.

24 **Erklärung.** Zahl ist eine aus gleichartigen Einheiten zusammengesetzte Größe, (9). Die Einheit also, als solche, ist keine Zahl. Aus gegebenen Zahlen eine, oder mehrere unbekannte finden (d. i. die Menge der gleichartigen Einheiten derselben bestimmen) heißt rechnen (calculare).

25. **Erklärung.** Die Eintheilungen der Zahlen sind verschieden. Hier bemerken wir vorläufig nur folgende:

I.) Eine ganze Zahl (Numerus integer) ist diejenige, die aus ganzen, d. i. solchen Einheiten besteht, welche nicht in Theile getheilt gedacht werden. Z. B. Drey Gulden. Dagegen entsteht eine gebrochene Zahl oder ein Bruch, (Numerus fractus s. fractio) wenn ein Ganzes, als Einheit betrachtet, in mehrere gleiche Theile getheilt gedacht wird, und davon Ein, oder mehrere Theile genommen werden. Z. B. zwey Fünftels Gulden. Endlich ist eine gemischte Zahl (Numerus mixtus) eine jede ganze Zahl mit einem

anhängenden Bruche z. B. zwey und drey Viertels Gulden.

II.) Eine gerade Zahl (Numerus par) ist diejenige, welche in zwey gleiche ganze Zahlen theilbar ist. Im Gegentheile heißt die Zahl ungerad (impar) z. B. Eins, drey ꝛc.

III.) Gleichartige oder ähnliche Zahlen sind jene, deren Einheiten einerley Qualität (3) haben. Z. B. Acht Gulden, und fünf Gulden. Im Gegentheile sind sie verschiedenartig. (Numeri heterogenei) Z. B. acht Gulden, drey Batzen, neun Kreutzer ꝛc.

IV. Benannte Zahlen sind jene, deren Einheiten benannt sind, z. B. drey Gulden, sechs Batzen ꝛc. Im Gegentheile sind sie unbenannte Zahlen z. B. drey, vier ꝛc.

V. Eine endliche Zahl (Numerus finitus) ist diejenige, die aus einer angeblichen Menge von Einheiten besteht (cujus vnitatum Multitudo est dabilis), im Gegentheile unendlich.

26. Wahlsatz. Als Zeichen der Zahlen wählt man entweder die Indianischen Ziffern, deren die neun ersten die Bedeutung einer bestimmten Vielheit von unbenannten Einheiten erhalten haben, und daher bedeutende Ziffern genannt werden, nämlich 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und die zehnte 0 (Nulle genannt oder Zerus) den Mangel

einer

einer bedeutenden Ziffer anzeigt: oder man wählt die Buchstaben des kleineren lateinischen Alphabeths a, b, c etc. Diese letzteren sind weit allgemeinere Zeichen der Zahlen, als die Ziffern. Denn sie lassen sowohl die Quantität, als Qualität der Zahlen unbestimmt, und können überhaupt jede mögliche, sowohl discrete als stätige Größe anzeigen; die Ziffern dagegen lassen bloß die Qualität der Zahlen unbestimmt. Hat man also zur Absicht, die Eigenschaften der Zahlen in ihrer größtmöglichen Allgemeinheit zu demonstriren, wie dieß von der Arithmetik, als Zahlenwissenschaft gefordert wird: so muß man sich der Buchstabenzeichen bedienen; und sonach kann der Unterschied der gemeinen, und höheren Arithmetik nicht darein gesetzt werden, als bediene sich jene bloß der Ziffern, diese aber der Buchstaben als Zeichen der Zahlen, sondern er hängt von der Verschiedenheit des Verfahrens ab, wornach beyde die Eigenschaften der Zahlen bestimmen (11). Inzwischen ist es räthlich, für Anfänger sich vorerst der Ziffern zu bedienen, als welche ihnen schon mehr geläufig sind; aber mit diesem Ziffercalcul zugleich auch den Litteralcalcul zu verbinden. In diesem bedeuten nun ins besondere die Anfangsbuchstaben des Alphabets a, b, c etc. bekannte Größen, die End-

buch-

buchstaben aber v, w, x, y, z unbekannte. Gewöhnlich wird auch jede Größe mit dem Anfangsbuchstaben desjenigen lateinischen Wortes bezeichnet, wodurch sie selbst ausgedrückt wird. Z. B. t bedeutet tempus, s. die Summa etc. Die unendlich große Größe drückt man aus durch ∞, die unendlich kleine aber durch $\frac{1}{\infty}$.

27. Wahlsatz. Der Werth der Zahlziffern ist willkührlich nach folgendem Gesetze bestimmt worden. Jede bedeutende Ziffer, wenn sie allein steht, bedeutet so viele einfache Einheiten, als sie anzeigt. Stehen aber mehrere Ziffern in einer Reihe neben einander; so erhält jede ihren Werth vom Platze, an welchem sie von der Rechten zur Linken steht. Die Ziffer nämlich am ersten Platze von der Rechten zur Linken bedeutet einfache Einheiten. Die am zweyten Platze Zehner (decades) derjenigen Einheiten, von denen in der Ziffer am ersten Platze die Rede war, die am dritten Platze bedeutet Zehner der Zehner d. i. Hunderte (centenarios), die am vierten Zehner der Hunderte, d. i. Tausende der einfachen Einheiten (millenarios simplices), die am fünften Zehner der Tausende (decades millenariorum) die am sechsten Zehner der Zehner der Tausende d. i. Hunderttausende (centenarios millenario-

nariorum), die am siebenten Platze Zehner der Hunderttausende d. i. Zehnhundert Tausende, oder Millionen, u. s. w. Millionen Millionen heißen Bimillionen. Diese kommen an der dreyzehnten Stelle von der Rechten zur Linken vor. Eben so werden Millionen Bimillionen Trimillionen genannt, und diese stehen am neunten Platze von der Rechten zur Linken ꝛc. Mangelt an einer dieser Stellen eine bedeutende Ziffer: so wird ein o dahin gesetzt.

Anmerkung.

Der Grund immer bis auf zehn zu zählen, und so verschiedene Ordnungen von Einheiten fest zu setzen; lag bey den Urhebern dieser Zahlordnung wahrscheinlich darin, weil sie sich der zehn Finger beym Zählen bedienten. Von dieser Ordnung nach dem decadischen Gesetze unterscheidet sich Leibnitzens Dyadik, Weigel's Tractik ꝛc.

28. Zusatz. Der Werth der Zahlziffern wächst also von der Rechten zur Linken immer um das Zehnfache; und sonach erhält jede Ziffer einer Zahl, wenn man ihr zur Rechten Nullen beysetzt, einen zehnfach größeren Werth so oft, als man der Zahl zur Rechten die Nulle beygesetzt hat.

29. Aufgabe. Eine vorgelegte Zifferzahl gehörig auszusprechen, oder eine

aus-

ausgesprochene richtig durch Ziffern anzuschreiben.

Auflösung I.) Die Zahl sey 24.534.503.602. Man theile sie von der Rechten zur Linken in Classen, und gebe einer jeden Classe drey Ziffern, ausgenommen die letzte Classe zur linken Hand, welche auch aus Einer, oder zwey Ziffern bestehen kann; über die erste Ziffer der dritten Classe setze man ein Strichlein, als Zeichen der Millionen, über die erste Ziffer der fünften Classe zwey Strichlein, als Zeichen der Billionen, über die erste der siebenten Classe drey Strichlein als Zeichen der Trillionen u. s. w. Jede Classe von 3 Ziffern enthält nun Hunderte, Zehner und Einheiten von derjenigen Ordnung, welche die Stelle der Ziffer anzeigt. Obige Zahl muß demnach so gelesen werden: vier und zwanzig tausend, fünfhundert vier und dreyssig Millionen, fünfhundert drey tausend, sechshundert und zwey.

Auflösung II. Das Anschreiben einer vorgetragenen Zahl geschieht nach ähnlicher Methode, wie das Aussprechen einer angeschriebenen.

Beweis. Dieser stützt sich ganz auf den Wahlsatz (27).

30. **Erklärung.** Die sogenannten Species der Arithmetik sind eben so viele Arten, gegebene Zahlen zu verändern. Eine Zahl wird aber verändert, wenn man zu den Einheiten, die sie enthält, entweder Einheiten hinzuthut, oder davon wegnimmt. Die Addition also, und Subtraction sind die zwey Principal-Species. Aber sowohl jene, als diese kann auf eine doppelte Art vollbracht werden. Denn die Zahl, welche zu einer andern addirt wird, ist von dieser andern in Ansehung ihrer Quantität entweder verschieden, oder ihr gleich. Dort entsteht die einfache, hier die wiederhohlte Addition, welche eigentlich Multiplication heißt. Eben so wird eine Zahl von einer gegebenen entweder nur einmahl weggenommen, oder so oft, bis von der gegebenen gar nichts mehr übrig ist. Dort ist es einfache Subtraction, hier aber wiederhohlte, und diese heißt Division. Also sind Addition, Subtraction, Multiplication, und Division die vier Hauptspecies der Arithmetik, auf welche sich alle übrige Arten, Zahlen zu verändern, stützen. —*

31.

---

*) Die Numeration lehrt bloß, eine Zahl auszusprechen, und anzuschreiben; sie ist also keine Species der Arithmetik.

31. Wahlsatz. Die Zeichen der arithmetischen Operationen sind:

✝ (Plus) das Zeichen der Addition; z. B. 3 ✝ 4.

— (Minus) das Zeichen der Subtraction; z. B. 4 — 3.

X oder . (ductum) das Zeichen der Multiplication; z. B. 3 X 4; a X b oder auch a . b.

: (divisum) das Zeichen der Division; z. B. 8 : 4 wofür man auch gewöhnlich schreibt $\frac{8}{4}$, oder allgemein $\frac{a}{b}$.

= (aequale) das Zeichen der Gleichheit; z. B. 3 ✝ 4 = 7.

< das Zeichen der Ungleichheit, so daß jene Größe, vor welcher die Oeffnung dieses Zeichens steht, größer ist, als die andere, vor welcher die Spitze steht; z. B. $3 < 5$; $8 > 6$ ꝛc.

∽ (Simile) das Zeichen der Aehnlichkeit z. B. 3 Gulden ∽ 5 Gulden (4)

≡ (Congruent) das Zeichen der Congruenz; (4) z B. 6 Gulden ≡ 6 Gulden.

32. Allgemeine Grundsätze.

I. Jede Größe A ist sich selbst, so wie auch allen ihren Theilen zusammengenommen gleich.

I. Das ganze A ist größer, als jeder seiner Theile. Der Theil ist kleiner, als das Ganze.

III. Von Größen, die gleich sind, kann, der Größe unbeschadet, Eine für die andere gesetzt werden.

IV. Gleiches zu Gleichem addirt, giebt Gleiches.

V. Gleiches von Gleichem weggenommen, läßt Gleiches übrig.

VI. Gleiches zu Ungleichem addirt, giebt Ungleiches.

VII. Gleiches von Ungleichem subtrahirt, läßt Ungleiches.

VIII. Gleiches gleich vielmal genommen, giebt Gleiches.

IX. Gleiches durch Gleiches getheilt, giebt Gleiches.

X. Größen, die einer dritten gleich sind, sind unter sich gleich.

XI. Größen, die gleichen Größen gleich sind, sind unter sich gleich.

XII. Nimmt man von einem Ganzen alle Theile weg: so bleibt Nichts übrig.

XIII. Thut man die von einem Ganzen weggenommenen Theile zu den übrig gebliebenen hinzu: so kömmt das Ganze wieder heraus.

Wir schreiten nun zu der Lehre von den 4 Stamm-Rechnungsarten (30) in ganzen Zahlen, und der Abmessung derselben selbst fort, und zwar so, daß wir jene in zwey Abschnitten vortragen, wovon der erste den Calcul mit ganzen Zifferzahlen, der zweyte aber den Calcul mit ganzen Buchstabengrößen abhandelt.

Des

Des Ersten Kapitels der Elementar-Arithmetik

Erster Theil

Lehre von den 4 Stamm-Rechnungsarten in ganzen Zahlen.

Erster Abschnitt.

Vom Calcul mit ganzen Zifferzahlen.

Erster Artikel.

Von der Addition.

33. Erklärung. Zwey, oder mehrere Größen addiren, heißt eine andere Größe finden, welche den gegebenen zusammengenommen gleich ist. Diese andere Größe heißt die Summe, die gegebenen Größen die Summanden, die Erfindung der Summe ist die Addition.

34. Zusatz. Es ist also richtig addirt, wenn die richtige Summe gefunden worden ist. Die Summe ist aber richtig, wenn sie allen Theilen der Summanden zusammengenommen gleich ist (32. I.), mithin nichts von ihr übrig bleibt, wenn man von ihr die Summanden wieder wegnimmt. (32. XII.)

35. Aufgabe. Gegebene Zifferzahlen zu addiren.

Auflösung. Schreibet die gegebenen Zahlen so unter einander, daß Einheiten unter Einheiten, Zehner unter Zehner ꝛc zu stehen kommen; ziehet dann einen Strich darunter, und beobachtet folgende Regeln:

I. Regel. Addiret zuerst die einfachen Einheiten. Ist die Summe derselben nur eine einzige Ziffer: so setzt diese Ziffer unter dem Striche an der Stelle der Einheiten an: addiret dann gleichmäßig die Zehner, und wenn die Summe derselben auch nur eine einzige Ziffer giebt: so setzt sie gleichmäßig an der Stelle der Zehner an; eben so verfahrt mit den Hunderten ꝛc. Sind in einer Columne der Summanden lauter Nullen: so setzt auch unten an der correspondirenden Stelle eine Nulle an, wie das Exempel I. im beygesetzten Schema zeigt.

Exempl. I.
4 5 0 3
2 1 0 4
S. = 6 6 0 7

II. Regel. Besteht die Summe der Einheiten aus zwey Ziffern: so schreibt nur die letzte,

welche

welche Einheiten bedeutet, an der Stelle der Einheiten an, und die andere, welche Zehner bedeutet, addirt zu der Summe der Zehner. Besteht diese wieder aus zwey Ziffern: so schreibt nur die erste, welche einfache Zehner bedeutet, an der Stelle der Zehner an, und die andere, die Hunderte bedeutet, werft zu der Summe der Hunderten, und verfahrt gleichmäßig mit den Hunderten ꝛc. Hat etwa eine zweyziffrige Summe zur rechten Hand eine Nulle: so setzt auch unten am gehörigen Orte ein o an, oder statt dessen das, was von der nächst vorhergehenden zweyziffrigen Summe im Sinne behalten wurde, wie aus dem Exempl. II erhellet.

Exempl. II.

8	3	o	4	5
7	7	o	5	7
3	9	o	o	5
1	9	9	1	o 7

Beweis. Die nach den gegebenen Regeln erhaltene Summe enthält alle Theile der Summanden, nämlich alle Einheiten, Zehner ꝛc. derselben: also ist sie den Summanden zusammengenommen gleich, mithin die wahre Summe, und sonach die Addition nach diesen Regeln anzustellen.

(34)

36. Aufgabe. Die Richtigkeit der vollbrachten Addition zu untersuchen.

Auflösung I. Nehmt von der Summe die Summanden weg; wenn Nichts übrig bleibt: so ist richtig addiret nach dem Zusatze (34); diese Subtraction aber lehrt der folgende Artikel.

II. Wiederhohlet mit der gehörigen Aufmerksamkeit die Addition von oben herab zu, wenn ihr zuerst von unten hinauf zu addiret habt. Kömmt dieselbe Summe heraus: so habt ihr Grund anzunehmen, daß recht addirt worden sey.

Anmerk. 1). Absolute ist es gleichwohl möglich, daß in jedem Verfahren der Auflösung II der nämliche Fehler begangen werde.

2) Die sogenannte Neunerprobe ist trüglich, daher auszumerzen.

3) Von der Addition heterogener Zifferzahlen wird weiter unten gehandelt werden. (cf. §. 63)

Zweyter Artikel.

Von der Subtraction.

37. Erklärung. Eine gegebene Größe von einer anderen abziehen, heißt eine Größe finden, welche anzeigt, um wie viel die beyden gegebenen Größen in Ansehung ihrer Quantität von einander unterschieden seyen. Diese zu findende Größe heißt Differenz; die abzuziehende Größe der Subtrahend; die andere von der abgezogen werden soll,

soll, der Minuend. Die Erfindung der Differenz heißt Subtraction.

38. Zusatz. Es ist richtig subtrahiret worden, wenn die richtige Differenz gefunden worden ist: die Differenz ist aber die richtige, wenn sie zu dem Subtrahend addiret den Minuend giebt, nach dem Grundsatze XIII. (32)

39. Aufgabe. Eine kleinere Zifferzahl von einer größeren abzuziehen.

Auflösung. Man schreibe beyde unter einander, wie in der Addition (35), ziehe einen Strich darunter, und verfahre nach folgenden Regeln:

I. Regel. Ziehet die Einheiten des Subtrahend's von den Einheiten des Minuend's ab, und setzt den Rest unter der Linie an die Stelle der Einheiten. Verfahrt eben so mit den Zehnern, Hunderten ꝛc. des Subtrahend's und Minuend's, wie das Exempl. I. zeigt.

Exempl. I.

M.	3	4	6	4
S.	2	3	4	2
D.	1	1	2	2

II. Regel. Kommt im Subtrahend ein Zerus vor: so setzt unter die Linie am correspondirenden Platze die Ziffer des Minuend's, die ober

dem Zerus steht: ist aber sowohl die Ziffer des Subtrahend's, als des Minuend's ein Zerus, oder sind beyde einander gleich: so setzt unten am correspondirenden Orte auch einen Zerus, wie das Exempl. II. zeigt.

Exempl. II.					
M.	6	0	3	4	5
S.	4	0	3	2	5
D.	2	0	0	2	0

III. Regel. Ist die abzuziehende Ziffer größer, als die correspondirende im Minuend: so vermehrt die Ziffer des Minuend's durch eine von der nächst folgenden bedeutenden Ziffer des Minuend's entlehnte decadische Einheit; wo dann eben diese nächst folgende bedeutende Ziffer des Minuend's um 1 vermindert, mithin 0 wird, wenn sie selbst nur 1 ist. Die Nullen aber, welche etwa zwischen ihr und der andern durch die entlehnte decadische Einheit vermehrten Ziffer in der Mitte liegen, werden alle Neuner, wie das Exempl. III zeigt.

Exempl. III.							
M.	3	1	0	0	4	3	2
S.		5	3	0	7	2	6
D.	2	5	6	9	7	0	6

Beweis. Nach den gegebenen Regeln wird die Differenz der Einheiten, Zehner ꝛc., die im Minuend und Subtrahend enthalten sind, gefunden, wie von selbst erhellet: der Minuend aber, so wie der Subtrahend, als Ganze sind allen ihren Theilen zusammengenommen gleich; mithin wird nach eben diesen Regeln die Differenz des Minuend's und Subtrahend's gefunden, folglich wird nach ihnen recht subtrahiret. (37)

40. Aufgabe. Die Richtigkeit der geschehenen Subtraction zu prüfen.

Auflösung. Addiret die Differenz zum Subtrahend; kömmt dann der Minuend wieder heraus: so ist richtig subtrahiret, nach dem Zusatze. (38)

Anmerkungen.

1) Auch hier ist die sogenannte Neunerprobe trüglich: mithin auszumerzen.

2) Von der Subtraction heterogener Zifferzahlen weiter unten (§. 64.). Eben so erst im Verlaufe (§. 83) von dem Falle, wenn eine größere Zifferzahl z. B. 221 abzuziehen ist von einer kleineren z. B. von 121.

Dritter Artikel.

Von der Multiplication.

41. Erklärung. Eine Größe = M durch eine andere = m multipliciren, heißt, dieselbe so oft und so zu sich addiren, wie oft und

wie * in der andern Größe die Einheit enthalten ist. Die Größe, die auf diese Weise zum Vorscheine kömmt, heißt das Factum, oder Product; die Größe M der Multiplikand; die Größe m der Multiplicator, beyde zusammen die Factores ꝛc. Die Multiplication ist sonach die Erfindung des Productes.

42. Zusatz 1) Die Multiplication ist eine wiederhohlte Addition, des Multiplicand's nämlich zu sich selbst so oft, als der Multiplicator anzeigt. Man erkläre aber deswegen die Multiplication nicht für überflüssig: weiter unten (97) wird sich das Eigenthümliche derselben, wodurch sie sich von der einfachen Addition wesentlich unterscheidet, deutlich zeigen.

43. Zusatz 2. Das Factum enthält so oft und so den Multiplicand, wie oft und wie die Einheit im Multiplicator steckt. Umgekehrt enthält das Factum auch so oft und so den Multiplicator, wie oft und wie die Einheit im Multiplicand steckt. Denn um das Factum zu erhalten, muß

der

---

*) Dieses wie ist zweyfach bestimmbar. 1) Ist in der Größe m die Einheit entweder ganz genommen, enthalten, oder gebrochen, d. i. die andere Größe m ist entweder eine ganze oder gebrochene Größe. 2) Kann die Einheit in m entweder positiv, oder negativ genommen enthalten seyn, wovon aber allererst in der Lehre vom Buchstabencalcul die Rede seyn wird.

der Multiplicand so oft und so zu sich addirt werden, wie oft und wie die Einheit im Multiplicator steckt. Der Multiplicand aber ist gleich seinen Einheiten zusammengenommen: also muß auch jede Einheit des Multiplicand's so oft und so zu sich addirt werden, wie oft und wie die Einheit in Multiplicator steckt. Jede Einheit des Multiplicand's giebt sonach im Producte den ganzen Multiplicator; also. — Daher kömmt das nämliche Factum heraus, man mag von beyden Factoren den Einen oder den andern zum Multiplicand, und den andern zum Multiplicator machen. Bey Zifferzahlen nimmt man jedoch bequemer die kleinere zum Multiplicator.

44. Zusatz 3. Der Multiplicator ist seiner Bestimmung zu Folge immer eine unbenannte Zahl. Der Multiplicand aber kann benannt seyn, und dann ist auch das Product auf gleiche Weise benannt.

45. Erklärung. Wird eine Größe zu sich selbst addiret, oder, was dasselbe ist, durch eine Zahl multipliciret, (41) welche anzeigt, wie oft, und wie jene Addition geschehen müsse: so entsteht ein Vielfaches (Multiplum) von jener Größe. Z. B. $6 \times 3 = 6 + 6 + 6 = 18$ ist ein Vielfaches von 6, und zwar das dreyfache (triplum). Dagegen ist 6 der dritte Theil (Subtriplum) von 18. Jede Zahl ist sonach ein Vielfaches der Einheit. (24)

Ferner heißt jede Größe in Beziehung auf ihr Multiplum ein aliquoter Theil; zum Unterschiede von dem aliquanten Theile, d. i. demjenigen, durch dessen Addition zu sich selbst das gegebene Ganze, wovon eine Größe als Theil betrachtet wird, nicht erzeugt wird. So ist z. B. 7 ein aliquanter Theil von 12. Die Einheit ist sonach ein aliquoter Theil von jeder Zahl.

46. Erklärung. Wird von mehreren Größen eine jede eben so oft, und auf gleiche Weise zu sich addirt; oder, was dasselbe ist, werden mehrere Größen durch die nämliche dritte Größe multiplicirt: so heißen die herauskommenden Größen gleichvielfache Größen (quanta æque multipla) in Beziehung auf jene, welche dann einfache Größen (quantitates simplæ) genannt werden. So sind z. B. 6 und 12 Quanta æque multipla in Beziehung auf 3 und 6. Diese aber sind Simpla in Beziehung auf jene. Die Begriffe von einfachen und gleichvielfachen Größen sind also ganz relativ.

47. Aufgabe. Die Producte aller einziffrigen Zahlen, oder das Einmaleins, oder die pythagorische Rechentafel zu construiren.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Auflösung. Man schreibe die 9 einfachen Ziffern neben einander wie die oberste Reihe der beyliegenden Tafel zeigt. In der zweyten untergesetzten Reihe setze man das Zweyfache derselben, welches erhalten wird, wenn man eine jede Ziffer der ersten Reihe zu sich selbst addirt (45). In der dritten Reihe setze man das Dreyfache einer jeden Ziffer in der ersten Reihe, welches erhalten wird, wenn man eine jede Ziffer der ersten Reihe addirt zu ihrem Zweyfachen in der 2ten Reihe; und

fahre

fahre so fort, bis man das Neunfache einer jeden Ziffer der ersten Reihe hat.

Beweis. Dieser erhellt von selbst aus der Erklärung (45) verglichen mit der Erklärung (41).

48. Zusatz. Das Product aus zwey einfachen Zifferzahlen wird durch diese Tafel erhalten, wenn man die eine Zifferzahl in der obersten Reihe, die andere aber in der ersten Columne zur linken Hand sucht, und dann von dem einen Factor in der obersten Reihe in der Columne, an deren Spitze er steht, so weit herabfährt, bis man auf diejenige Reihe stößt, an deren Ende zur linken Hand der andere Factor steht. Die Zahl, auf welche man bey diesem Herabfahren stößt, ist das gesuchte Product. So ist z. B. $8 \times 9 = 72$.

49. Aufgabe. Gegebene Zifferzahlen mit einander zu multipliciren.

Auflösung. Setzet den Multiplicator unter den Multiplicand, so, daß Einheiten unter Einheiten, Zehner unter Zehner ꝛc. zu stehen kommen; zieht dann einen Strich, und verfahret nach folgenden Regeln:

I. Regel. Ist der Multiplicator nur eine einzige Ziffer, wie im Exempl. I: so multipliciret durch ihn mit Hülfe der pythagorischen Rechentafel zuerst die Einheiten, dann Zehner ꝛc. des Multiplicand's. Die einzelnen Producte, wenn

sie

sie einziffrig sind, setzt unter den Multiplicationsstrich, jedes an seine gehörige Stelle, und ihr habt das verlangte Product. Kommt im Multiplicand eine Nulle vor; so ist das Factum stäts auch = o, da das Nichts, noch so oft gesetzt, immer Nichts bleibt.

Exempl. I.
4 o 3 2
2
8 o 6 4

II. Regel. Ist eines der Partial-Producten zweyziffrig, mithin größer als 9: so addiret die Zehner in demselben zu dem Producte der Zehner, und die Hunderte zu dem Producte der Hunderte ꝛc. wie das Exempel II zeigt.

Exempel II
9 3 o 7 8
9
8 3 7 7 o 2

III. Regel. Ist der Multiplicator mehrziffrig: so multipliciret vorerst den ganzen Multiplicand durch die Einheiten des Multiplicators, nach den vorausgehenden Regeln; dann gleichmäßig durch die Zehner des Multiplicators, und schreibt das erste

dieser

dieſer Producte an die Stelle der Zehner, das zweyte an die Stelle der Hunderte ꝛc. gleichmäßig multipliciret den ganzen Multiplicand durch die Hunderte ꝛc. des Multiplicators, und ſetzt die Partialproducte wieder an ihre gehörige Stelle: addiret dann alle dieſe Partialproducte zuſammen, und ihr habt das verlangte Product. Das Exempel III liefert hiezu das Schema.

Exempel III

```
        5039
         324
      -------
       20156
     100780
   151170
  -------
  1632636
```

IV. Regel. Kommen in dem Multiplicator Nullen vor, entweder am Ende, oder unter den bedeutenden Ziffern, oder ſowohl am Ende, als in der Mitte deſſelben: ſo multipliciret nur den ganzen Multiplicand durch die bedeutenden Ziffern des Multiplicators, und ſetzt die Partial-Producte an ihre gehörige Stelle, mithin ſo an, daß immer die erſte anzuſchreibende Ziffer des Productes genau unter diejenige bedeutende Ziffer des Multiplicators zu ſtehen komme, durch welche der Multiplicand war multiplicirt worden. Addiret dann alle Partial-Producte zuſammen, und ſetzt zu dieſer Summa

alle

alle Nullen hinzu, welche der Multiplicator am Ende hatte, wie das Exempel IV zeigt.

Exempel IV

3024
30200
6048
9072
91324800

V. Regel. Hat sowohl der Multiplicand, als Multiplicator am Ende Nullen: so multipliciret nur durch die bedeutenden Ziffern des Multiplicators diejenigen Ziffern des Multiplicand's, welche auf die Nullen desselben gegen die linke Hand zu folgen. Zu dem so erhaltenen ganzen Producte setzt dann alle Nullen, die am Ende des Multiplicands und Multiplicators vorkommen, wie das Exempel V zeigt.

Exempl. V.

23000
3400
92
69
78200000

Ist aber der Multiplicator = 1 mit Null, en: so ist das Product gleich dem Multiplicande, durch die hinzu geworfenen Nullen des Multiplicators vermehret; wie das Exempel VI zeigt.

Exempl. VI.

3240
100
324000

Beweis. Nach diesen Regeln werden, wie jeder Nachdenkende leicht einsehen kann, alle Theile des Multiplicand's, nämlich seine sowohl einfache, als decadische, und centenarische ꝛc. Einheiten so oft und so gesetzt, wie oft, und wie die Einheit im Multiplicator enthalten ist; also muß nach diesen Regeln multiplicirt werden. (41)

50. Aufgabe. Die Richtigkeit der vollbrachten Multiplication zu prüfen.

Auflösung. Diese Prüfung geschieht durch die Division, wie im nächsten Artikel wird gezeigt werden. §. 60.

Anmerkungen.

1) Die sogenannte Neunerprobe ist auch hier wieder trüglich.
2) Von der Multiplication der heterogenen Zifferzahlen handelt allererst der §. 65.
3) Die Construction der Nepper'schen Rechenstäbchen ist künstlich; statt des Gebrauch's derselben aber jungen Leuten anzurathen, daß

sie

sie das Einmal Eins tüchtig lernen, um derselben entbehren zu können.

Vierter Artikel.

Von der Division.

51. Erklärung. Eine Größe (= D) dividiren durch eine andere (= d), heißt eine Größe (= q) finden, welche anzeigt, wie oft und wie * die 2te Größe (= d) enthalten sey in der ersten (= D). Die erste Größe (= D) heißt der Dividend, die andere (= d) der Divisor, die dritte (= q) der Quotus, oder Quotient. Die Division ist sonach die Erfindung des Quotus.

* Dieses wie ist wieder 2fach bestimmbar. 1) Kann die Größe d (Divisor), als ganze Zahl, enthalten seyn in der Größe D (im Dividende), wenn nämlich der Dividend entweder größer, als der Divisor, oder doch ihm gleich ist; oder ist nur ein bestimmter Theil des Divisor's im Dividende enthalten, wenn nämlich der Divisor größer ist, als der Dividend. Z. B. 2 dividirt durch 5 giebt im Quotus zwey Fünftel, weil nur der 5te Theil vom Divisor 5, (welcher 5te Theil = 1 ist) zweymal genommen, (mithin nur zwey fünfte Theile vom Divisor 5) im Dividende 2 enthalten ist. 2) Kann d in D entweder positiv oder negativ enthalten seyn, wovon aber allererst im Buchstabencalcule die Rede seyn wird.

52. Zusatz 1. Wie oft der Divisor im Dividend enthalten sey, sieht man deutlich dadurch ein, daß man den Divisor vom Dividende so oft abzieht, als es geschehen kann, bis vom Dividende nichts mehr übrig ist. Daher ist die Division eine wiederhohlte Subtraction. Daß sie aber gleichwohl von der bloßen Subtraction wesentlich unterschieden sey, werden wir im Verlaufe sehen. (96)

53. Zusatz 2. Für ein jedesmaliges Enthaltenseyn des Divisor's im Dividende wird im Quotus die Einheit gesetzt, und zwar eben so gesetzt, wie der Divisor im Dividende enthalten ist. Also ist die Einheit im Quotus eben so oft und so enthalten, wie oft und wie der Divisor im Dividende enthalten ist.

54. Zusatz 3. Wenn also der Divisor eben so oft und so zu sich addiret wird, wie oft und wie die Einheit im Quotus steckt, d. h. wenn der Divisor mit dem Quotus multipliciret wird (41): so muß der Dividend herauskommen. Mithin muß auch der Quotus mit dem Divisor multiplicirt dem Dividende gleich seyn. (43)

55. Zusatz 4. Die Division ist richtig, wenn der gefundene Quotus der richtige ist. Dieser ist aber richtig, wenn er mit dem Divisor multiplicirt gleich ist dem Dividende. (54)

56. Zusatz 5. Jeder Dividend kann heißen $= D$, jeder Divisor $= d$ und der Quotus $= q$. Mithin ist $D = d \times q$ (55), und $d \times q$ kann jedes mögliche Factum vorstellen, dessen zwey Factores sind d und q. Da nun, wenn $d \times q$ dividiret wird durch einen von seinen beyden Factoren, der andere Factor der Quotus seyn muß, (nach dem Zusatz 55): so ist überhaupt, wenn ein Factum durch einen von seinen beyden Factoren dividiret wird, der andere Factor der Quotus.

57. Zusatz 6. Der Quotus entspringt aus dem Dividende eben so, wie die Einheit im Divisor enthalten ist. Denn der Quotus eben so oft und so genommen, wie oft und wie die Einheit im Divisor steckt, ist gleich dem Dividende, (54) welches nicht seyn könnte, wenn der aufgestellte Zusatz nicht Statt fände. —

Sonach sind die Einheiten des Quotus immer von der nämlichen Qualität, von welcher jene des Dividend's sind. — Zugleich erhellet, daß der Divisor, seiner Bestimmung gemäß, immer nur eine unbenannte Zahl seyn könne, und seyn müsse.

58. Aufgabe. Zifferzahlen durch einander zu dividiren.

Auflösung. Es können hier nur drey Fälle Statt finden. Denn entweder ist der Dividend sowohl, als Divisor einziffrig; oder ist der Dividend mehrziffrig, der Divisor aber einziffrig; oder sind beyde vielziffrig.* Um nun den Quotus in diesen drey Fällen zu finden, ziehe man hinter dem Dividende einen Strich, setze hinter diesen den Divisor, ziehe unter dem Divisor wieder einen Strich, und setze unter denselben den Quotus, wie das Schema des Exempels I zeigt.

Die Regeln aber zur Findung des Quotus sind folgende.

I. Regel. Ist der Dividend und der Divisor einziffrig, so muß, da jeder Dividend als ein Product gilt, wovon der gegebene Divisor der eine Factor ist, der Quotus der andere Factor seyn. (56) Sehet also in der pythagorischen Rechentafel (47), wie oft der Divisor in dem Dividende enthalten sey, d. i. suchet aus den 9 ersten bedeutenden Ziffern diejenige, welche mit dem gegebenen einziffrigen Divisor multipliciret ein Factum giebt, das dem Gegebenen einziffrigen Dividende entweder gleich, oder zunächst kleiner ist, als derselbe. Diese Ziffer schreibt alsdann an der Stelle des Quotus an; im ersten Falle ist sie der wahre,

im

* Wäre der Dividend einziffrig, der Divisor aber vielziffrig: so wäre der Quotus ein Bruch, von dem aber allererst im II. Capitel die Rede seyn wird. Siehe die Anmerk. §. 51.

im zweyten der nächstwahre Quotus, und in diesem zweyten Falle subtrahiret das Product aus ihr in den Divisor vom gegebenen Dividende, und setzet den Rest hinter den nächstwahren Quotus, und unter ihn den Divisor, wie das Exempl. I zeigt.

Exempl. I.

D. 9	d. 2
8	q. $4\frac{1}{2}$
1	

II. Regel. Ist der Divisor einziffrig, der Dividend aber vielziffrig: so sehet, wie oft er in der ersten Ziffer zur linken Hand des Dividend's, oder (wenn diese erste Ziffer kleiner ist, als der Divisor) in den zwey ersten Ziffern des Dividend's enthalten ist. Diesen Quotus setzt an seiner gehörigen Stelle an, multipliciret ihn dann mit dem Divisor, und ziehet das Product von der, oder den Ziffern des Dividend's ab, in welche dividirt worden war. Bleibt kein Rest: so setzet unter den Subtractionsstrich die nächste Ziffer des Dividend's, und dividiret in dieselbe, wie vorhin. Bleibt aber ein Rest: so setzet zu ihm die nächst folgende Ziffer des Dividend's herab, und dividiret darein, wie vorhin. Das nämliche thut in Ansehung aller noch übrigen Ziffern des Dividend's, bis entweder gar nichts mehr übrig bleibt, oder zuletzt ein Rest

zum Vorschein, kömmt, der kleiner ist, als der Divisor *. Diesen Rest setzt dann hinter den erhaltenen nächstwahren Quotus, wie im Exempl. I geschah; und auch das Exempl. II zeigt.

Exempel II

D. 3298	d. 7
28	q. 471 $\frac{1}{7}$
49	
49	
ø8	
7	
1	

III. Regel. Ist nach vollbrachter Division der ersten, oder zwey ꝛc. ersten Ziffern des Dividend's kein Rest geblieben, und ist nun etwa Eine der nächstfolgenden Ziffern des Dividend's, in welche ganz allein dividirt werden muß, kleiner als der Divisor: so setzt im Quotus als nächste Ziffer eine Nulle an. Setzt dann zu jener Ziffer die nächstfolgende des Dividends herab, und dividirt wie vorhin (Regel 2), nach Anweisung des Exempl. III.

IV.

* Ist der Rest größer, oder gleich dem Divisor: so ist die angenommene Quotusziffer zu klein.

Exempl. III.

D. 213	d. 2
2	q. 106 $\frac{1}{2}$
ø 13	
12	
1	

IV. Regel. Ist der Dividend sowohl, als der Divisor vielziffrig: so schneidet im Dividende so viele Ziffern von der Linken zur Rechten ab, als nöthig sind, damit in der daraus entstehenden Zahl der Divisor enthalten sey. Im übrigen verfahrt nach den vorigen Regeln, wie das Exempl. IV zeigt.

Exempl. IV.

D. 17092	d. 34
170	q. 502 $\frac{24}{34}$
ø 92	
68	
24	

Anmerkungen.

1) Ist der Divisor eine große Zahl, wo man nur versuchsweise finden kann, wie oft er in den nach der IV. Regel abgeschnittenen Ziffern des Dividend's enthalten sey: so ist es eine Erleicht-

erung beym Dividiren, wenn man sich vorher die Multipla (45) des Divisors bis auf sein Neunfaches macht, wozu die Construction der pythagorischen Rechentafel (47) wie auch beyliegendes Schema * im Bezuge auf Exempl. IV. die Anleitung giebt. Man nimmt dann aus diesen Vielfachen dasjenige, welches der Zahl in den abgeschnittenen Ziffern des Dividend's entweder gleich ist, oder doch nächst kleiner, als dieselbe. Die Zahl nun, welche anzeigt, das Wievielfache des Divisors jenes genommene Vielfache ist, ist die gesuchte Quotusziffer. So ist z. B. im Exempl. IV. das 5fache des Divisors 34 gleich der Zahl 170, mithin 34 in 170 fünfmahl enthalten.

*	I	34 Division.
	II	68
	III	102
	IV	136
	V.	170
	VI	204
	VII	238
	VIII	272
	IX	306

2) Der Grund, warum jede gesuchte Quotusnote nur einziffrig seyn darf, liegt darin, weil, wenn man die Einheiten einer jeden Ordnung bis auf 10 zählt (welches 10 die niedrigste zweyziffrige

ziffrige Zahl ist) schon eine Einheit von der nächsthöheren Ordnung herauskömmt. (27. 28.)

V. Regel. Hat der Divisor Nullen am Ende: so schneidet sie ab, und auch eben so viele Ziffern im Dividende von der Rechten zur Linken. In die übrigen des Dividend's dividirt dann durch die übrigen des Divisors nach den vorigen Regeln. Bleibt zuletzt ein Rest: so setzt zu diesem die abgeschnittenen Ziffern des Dividend's, und setzt dann diese ganze Zahl hinter den erhaltenen nächstwahren Quotus, und unter dieselbe den ganzen Divisor. Bleibt aber kein Rest: so setzt die abgeschnittenen Ziffern des Dividend's allein hinter den gefundenen Quotus, und unter sie den ganzen Divisor, wie das Exempel V, und VI zeigt.

Exempl. V.

D. 55.76	d. 5.00
5	q. 11 $\frac{76}{00}$
ø5	
5	
ø	

Exempl. VI.

D. 56.7	d. 5.0
5	q. 11 $\frac{17}{50}$
ø6	
5	
17	

VI.

VI. Regel. Hat so wohl der Dividend, als der Divisor am Ende Nullen: so lasset beyderseits gleich viele weg, und dividiret dann nach den vorigen Regeln, wie im Exempl. VII erhellet. Ist hiebey die bedeutende Ziffer des Divisors = 1: so ist das, was vom Dividende übrig bleibt, wenn gleich viele Nullen in ihm, und im Divisor weggelassen werden, der Quotus selbst.

Exempl. VII.

D. 350,00	d. 5,00
35	q. 70
ø 0	

Beweis. Nach diesen Regeln wird, wie ein geringes Nachdenken über eine jede derselben lehrt, ein Quotus erhalten, der so oft, und so die Einheit enthält, wie oft und wie der Divisor im Dividende (oder in seinen einzelnen Theilen) enthalten ist; also wird nach denselben recht dividiret. (53)

59. Aufgabe. Die Richtigkeit des gefundenen Quotus zu prüfen.

Auflösung I. Ist der Quotus eine ganze Zahl: so muß er, wenn er der wahre ist, mit dem Divisor multiplicirt, den Dividend wiedergeben; und ist er nicht von dieser Art: so ist er auch nicht der wahre, mithin die Division fehlerhaft. (55)

Auf-

Auflösung II. Ist der Quotus eine gemischte Zahl (25. I), welches der Fall ist, wenn am Ende der Division ein Rest bleibt, der jedesmal kleiner seyn muß, als der Divisor: so ist er der wahre, wenn er, in wiefern er eine reine ganze Zahl ist, mit dem Divisor multipliciret ein Product giebt, das mit dem Reste zusammengenommen dem Dividende gleich ist.

Beweis. So viele Einheiten der genannte Rest hat: um eben so viel ist der Dividend größer, als das Product aus dem Divisor in den Quotus, in wiefern er eine reine ganze Zahl ist. Wenn sonach zu diesem Producte jener Rest addiret wird: so muß nothwendig, wenn nur der gefundene Quotus, als reine ganze Zahl betrachtet, richtig ist, der Dividend zum Vorscheine kommen, und umgekehrt, wenn der Dividend auf diese Weise zum Vorscheine kommt: so ist jener Quotus der wahre.

60. Aufgabe. Die Richtigkeit der Multiplication zu prüfen.

Auflösung. Dividiret das Product durch den Einen der beyden Factoren; kömmt dann der andere Factor als Quotus heraus: so ist die Multiplication richtig. Der Beweis hiefür liegt in dem Zusatze (56).

Anmerkungen.

1) Von den Nepper'schen Tabellen gilt hier wieder, was oben (§. 50. Anmerk. 3.) steht.

2) Die Division heterogener Zifferzahlen geschieht so, wie der folgende Anhang lehrt.

Anhang zum ersten Abschnitte.

Die Rechnungsarten mit heterogenen Zifferzahlen, die in einander verwandelt werden können.

61. Aufgabe. Die Zifferzahl von der höheren Ordnung in eine Zahl von der niederen Ordnung zu verwandeln.

Auflösung. Multipliciret die gegebene Zahl von der höheren Ordnung durch diejenige Zahl, welche anzeigt, wie viele Einheiten von der nächst niederen Ordnung auf eine Einheit der nächst höheren Ordnung gehen. — Z. B. 6 Tage machen 144 Stunden, da auf einen Tag 24 Stunden gehen. Sonach sind 6 Tage + 4 Stunden = 148 Stunden. Diese werden nun in Minuten aufgelöst, wenn man 148 Stunden mit 60 multiplicirt, da eine Stunde = 60 Minuten ist. u. s. w.

62. Aufgabe. Eine Zahl von der niederen Ordnung zu verwandeln in eine Zahl von der höhern Ordnung.

Auflösung. Dividiret in die Zahl von der niederen Ordnung durch die Zahl, welche anzeigt, wie viele Einheiten von der Zahl der niederen Ordnung enthalten seyen in einer Einheit der Zahl der höheren Ordnung. Z. B. 120 Minuten sind $= \frac{120}{60} =$ 2 Stunden; und 3 Minuten $= \frac{3}{60}$ Stunden ꝛc.

63. Aufgabe. Heterogene Zahlen zu addiren.

Auflösung. Addiret jede Species derselben zu der ihr correspondirenden. Reduciret dann nach der Regel (62) die niederen Species auf die höheren. Z. B.

224 Tage, 12 Stunden, 20 Minuten, 80 Secunden
112 — 26 — 70 — 13 —
336 38 90 93

S=337 Tage, 15 Stunden, 31 Minuten, 33 Secunden.

64. Aufgabe. Heterogene Zahlen zu subtrahiren.

Auflösung. Subtrahiret die Zahl der niedrigsten Species im Subtrahende von der Zahl der correspondirenden Species im Minuende, und ist diese 0, oder doch geringer, als der Subtrahend: so entlehnt von der Zahl der nächst höheren Species so viele Einheiten, als nöthig sind, um, wenn ihr dieselbe nach der Regel (61) in Einheiten der nächst niederen Species, verwandelt, und diese Ein-

heiten

heiten dann entweder an die Stelle des ○ gesetzt, oder zu dem zu kleinen Minuende addirt habt, die Subtraction vornehmen zu können. Gleichmäßig verfahrt mit den übrigen Zahlen.

Z. B. M. 24 Tage, 2 Stunden, 20 Minuten,
S. 3 — 8 — 30 —

D. = 20 Tage, 17 Stunden, 50 Minuten.

65. Aufgabe. Heterogene Zahlen durch eine ganze Zahl zu multipliciren.

Auflösung. Multipliciret jede Species des Multiplicand's durch die gegebene ganze Zahl, reduciret dann die Zahlen der niederen Species auf Zahlen der höheren (nach 62). Z. B.

(6 Tage, 4 Stunden, 70 Minuten) X 3 ist = 18 Tagen, 12 Stunden, 210 Minuten, = 18 Tagen, 15 Stunden, 30 Minuten.

Anmerkung.

Die Lehre von der Multiplication der heterogenen Zahlen unter einander wird allererst in der Lehre von den Brüchen vorkommen.

66. Aufgabe. Heterogene Zahlen durch eine ganze Zahl zu dividiren.

Auflösung. Dividiret die Zahl von der höchsten Ordnung; den etwaigen Rest verwandelt in eine Zahl der nächst niedrigeren Ordnung nach der Regel (61), und addiret dann diese Zahl zu

der

der Zahl der nächst niedrigeren Ordnung, und dividiret die herauskommende Zahl durch den gegebenen Divisor, — mit den übrigen Zahlen des Dividend's verfahret gleichmäßig. Z. B.

(24 Tage, 15 Stunden, 30 Minuten): 5
= 4 Tage, 22 Stunden, 18 Minuten.

Beweis. Dieser erhellet von selbst in Ansehung aller Auflösungen der Aufgaben dieses Anhanges.

Anmerkung.

Von der Division heterogener Zahlen durch einander wird wieder allererst in der Lehre von den Brüchen die Rede seyn.

Der Lehre von den 4 Stamm-Rechnungsarten in ganzen Zahlen.

Zweyter Abschnitt.

Vom Calcul mit ganzen Buchstabengrößen.

67. Erklärung. Einstimmige Größen (quantitates consentientes, s. ejusdem conditionis) sind solche, wovon eine jede die andere, wenn sie mit ihr verbunden wird, um eben so viel vergrößert, als sie selbst beträgt. Z. B. 3 Meilen östlich und 6 Meilen östlich = 9 Meilen östlich. Eben so: 20 Gulden Vermögen, mehr 30 Gulden Vermögen, = 50 Gulden Vermögen.

Dagegen sind entgegengesetzte Größen (quanta contraria s. contrariæ conditionis)

solche, welche, wenn sie mit einander verbunden werden, einander so vermindern, daß sie einander entweder ganz, oder zum Theile aufheben. Z. B. 20 Meilen östlich, und 8 Meilen westlich zusammen geben nicht mehr, als 12 Meilen östlich, weil von den 20 Meilen östlich 8 Meilen östlich abgehen. Eben so geben 30 Thlr Vermögen, und 40 Thlr Schulden zusammen 10 Thlr Schulden.

68. Zusatz 1. Zwey entgegengesetzte Größen, als solche betrachtet, d. i. in wiefern man auf die ihnen anhängenden conträren Conditionen sieht, sind nicht gleichartig (1), mithin weder gleich, noch ungleich (4), also in Ansehung ihrer Quantität mit einander gar nicht vergleichbar — nicht zusammen addirbar, noch von einander subtrahirbar (33. 37).*

69. Zusatz 2. Sollen also zwey conträre Größen in Ansehung ihrer Quantität mit einander verglichen werden; so müssen sie erst in Gedanken in einstimmige Größen (67) verwandelt, und dann muß statt der Addition die Subtraction angestellet werden. Denn sonst würden sie sich durch ihre Verbindung einander nicht entweder ganz, oder zum Theile aufheben, was

doch

---

* H. Schulz Anfangsgründe der r. Mathesis. §. 106—109.

doch nach dem Begriffe von conträren Größen (67) geschehen muß. Z. B. 20 Gulden Vermögen, und 7 Gulden Schulden sind verbunden so viel, als 20 Gulden Vermögen weniger 7 Gulden Vermögen = 13 Gulden Vermögen; und 40 Thlr Schulden mehr 20 Thlr Vermögen sind so viel als 40 Thlr Schulden weniger 20 Thlr Schulden = 20 Thlr Schulden. Eben so geben 3 Meilen östlich mehr 20 Meilen westlich 20 Meilen westlich weniger 3 Meilen westlich = 17 Meilen westlich.

70. Zusatz 3. Von zwey entgegengesetzten Größen nennt man die Eine, welche man will, die positive (diejenige, um deren Setzung — Position — es uns bey einer Frage vorzüglich zu thun ist), und dann heißt die andere die negative. Z. B. nennt man das Vermögen eines Menschen die positive Größe: so sind seine Schulden die negative, und umgekehrt.

71) Zusatz 4. Derjenigen von zwey entgegengesetzten Größen, welche man die positive nennt, giebt man das Zeichen der Addition +, weil sie diejenige ist, die man als die zu allen übrigen mit ihr zusammenstimmenden Größen zu addirende betrachtet; der negativen aber das Zeichen der Subtraction —, weil, damit sie mit der positiven verbunden werden könne,

sie vorerst in Gedanken in eine positive verwandelt, und dann von der ersten abgezogen werden muß. Daher erklärt man die positive Größe gemeinhin auch für diejenige, vor welcher das Zeichen + stehet, oder doch wenigstens davor verstanden wird, (wie dieß der Fall ist, wenn sie entweder allein steht, oder in der Verbindung mit anderen Größen den ersten Platz von der Linken zur Rechten behauptet) die negative aber für diejenige, vorwelcher das Zeichen — stehet. — Dieß angenommen, ist es im Anfange räthlich, um bey der Anzeige der Addition, und Subtraction positiver, und negativer Größen aller Verwirrung vorzubeugen, diese Größen selbst sammt ihren Zeichen in eine Parenthese einzuschließen, und vor dieselbe das Zeichen entweder der Addition, oder Subtraction zu seßen. Z. B. a + (—b) heißt: die negative Größe —b soll addirt werden zu + a.

72. Zusaß 5. Keine Größe, an sich betrachtet, kann negativ oder positiv heißen. Denn diese Ausdrücke bezeichnen nur Größen, welche als einander entgegengeseßt, mithin im Verhältnisse zu einander betrachtet werden. Nimmt man aber den Begriff des positiven für identisch mit dem Begriffe des realen; wie er aber im Gegensaße mit dem Begriffe des negativen nicht genommen werden kann: so ist jede

Größe

Größe positiv, da jede eine Vielheit gleichartiger verbundener Einheiten, mithin Etwas reales ist.

73. Zusatz 6. Auch kann die negative Größe nicht für eine solche erklärt werden, die kleiner sey, als Nichts (minor Nihilo), außer in wie fern man sie im Verhältnisse zu der ihr entgegengesetzten positiven nimmt. Z. B. nennt man 20 Thlr Vermögen die positive Größe: so sind 4 Thlr Schulden die negative, und als solche weniger als Nichts von 20 Thlr Vermögen, weil, wer 4 Thlr Schulden hat, diese erst tilgen muß, um Nichts von 20 Thlr Vermögen zu haben — Nach dieser Ansicht ist es nun auch leicht zu begreifen, daß $-7 < -3$ sey.

74. Zusatz 7. Da $a + (-b) = a - (+b) = a - b$ ist (69 71): so gilt der Satz „negative Größen addiren ist so viel, als sie in positive verwandeln, und dann subtrahiren" (addere negativum est subtrahere idem positivum). Mithin ist $a + (-a) = a - (+a) = a - a = o$.

Ferner da $-a + (+b) = -a - (-b)$ ist: so gilt der Satz „addere positivum est subtrahere idem negativum." Ferner ist $a = a + o = a + b - b = a + b + (-b) = a + b - (+b)$. Nimmt man nun in den beyden letzten gleichen Ausdrücken das nämliche $+b$ weg: so bleibt gleiches übrig nach dem Grundsatze V. (32): also ist $a + (-b) = a - (+b)$ d. i. „subtrahere positivum est addere idem ne-

gativum. Endlich ist a = a + o = a + b — b = a + b + (— b). Also a = a + b + (—b). Setzt man nun zu diesen gleichen Größen das nämliche — (—b) hinzu: so kömmt wieder gleiches heraus (32. IV.), nämlich a — (—b) = a + b + (—b) — (—b). Da nun + (— b) — (—b) = o: so ist a — (— b) = a + b d. i. subtrahere negativum est addere idem positivum.

75. Erklärung. Verbundene Literalgrößen (quantitates literales complexæ s. polynomiæ) sind solche, deren Buchstabenzeichen durch + und — verbunden sind, z. B. a + b — c. Die einzelnen so verbundenen Buchstaben heißen Termini der polynomischen Größe, und von der Zahl dieser Terminen heißt die ganze Größe entweder binomisch z. B. a ± b, (2 namige) oder trinomisch (dreynamige), quadrinomisch — die übrigen werden von der Anzahl der Terminen benannt. Unverbundene Größen dagegen (incomplexæ s. monomiæ — einnamige) sind jene, deren Buchstaben nur neben einander stehen, ohne durch + und — verbunden zu seyn. Z. B. a, abc. Da gilt es nun gleichviel, nach welcher Ordnung nur immer die Buchstaben gesetzt werden, weil ihr Werth nicht vom Platze abhängt. Inzwischen setzt man sie schicklich nach der Ordnung, wie sie im Alphabete auf einander folgen.

76. Wahlsatz. Die Buchstaben der monomischen Größen werden unter einander multiplicir-

liciret verstanden. Z. B. $abc = a \times b \times c$. Die einzelnen Buchstaben sind die Factores, die ganze monomische Größe ist das Factum. Will man aber bloß anzeigen, daß polynomische Größen multipliciret werden müssen: so ist das Zeichen entweder dieses $(a + b - c)\ (f - g)$, oder $a + b - c \times f - g$, oder $(a + b - c)\ d$. Eben so ist das Zeichen der Division polynomischer Größen entweder $(a + b) : (c - d)$, oder auch $a + b : c - d$ oder gewöhnlicher dieses $\frac{a + b}{c - d}$

77. Wahlsatz. Die Ziffern werden mit den Buchstaben verbunden entweder durch + und —, und dann bedeuten sie bloß eine Menge von Einheiten, die mit den Buchstabengrößen entweder durch Addition oder Subtraction verbunden werden sollen. Oder stehen sie vor den Buchstaben, ohne + und — in der Mitte; dann heißen sie Coefficienten der Buchstabengrößen, und zeigen an, daß diese mit ihnen multipliciret seyen. Z. B. $3a = 3 \times a$, $3ab = 3 \times ab$. Oefters ist auch ein Buchstabe der Coeficient einer anderen Buchstabengröße, wenn nämlich der Calcul ganz allgemein werden soll. Z. B. ist von der Größe b die Rede: so ist in ab das a der Coeficient von b. Steht endlich vor einer Größe gar kein Coeficient ausgedrückt: so wird 1 davor als Coeficient verstanden. Z. B.

$a = 1a$. Endlich können die Ziffern dem Buchstaben zur Rechten und zwar über demselben stehen, wo sie Exponenten der Buchstabengrößen sind, und als solche anzeigen, daß der Buchstabe multiplicationsmäßig neben sich so oft zu setzen sey, als im Exponens die Einheit steckt. Z. B. $a^3 = aaa = a \times a \times a$. ist nun $a = 2$: so ist $a^3 = 8$. Dagegen $3a = 6$, und $3a^3 = 3 \times 8 = 24$. Oefters werden selbst auch Buchstaben als Exponenten von andern gebraucht, z. B. a^m, wo m anzeigt, daß a m^{mahl} multiplicationsmäßig neben sich zu setzen sey. Steht endlich gar kein Exponens angeschrieben: so gilt 1 als Exponens. Z. B. $a = a^1$

78. Erklärung. Buchstabengrößen heißen Homogen (quantitates similes), welche die nämlichen Buchstaben mit den nämlichen Exponenten haben. Fehlt eines dieser beyden Stücke: so sind sie heterogen z. B. a^3, und a^2 sind heterogen. Dagegen $3a^3 - 4a^3$ sind homogen.

Des Buchstabencalculs mit ganzen Größen

Erster Artikel.

Von der Reduction, und Addition.

79. Erklärung. Gegebene Größen reduciren heißt eine andere finden, die aus wenigeren Terminen besteht, und doch der gegebenen gleich ist. So ist z. B. $8 + 9 - 5 = 12$.

80. Aufgabe. Buchstabengrößen zu reduciren.

Auflösung. Sind homogene Terminen (78) vorräthig: so sehet, ob alle die nämlichen Zeichen haben, oder nicht. Dort addiret die Coefficienten, setzt hinter diese Summe die Buchstabengröße einmahl, und gebt dem Ganzen das gemeinschaftliche Zeichen. Z. B. $4a + 5a - 3b^2 - 5b^2 = 9a - 8b^2$. Hier aber ziehet den kleineren Coefficienten ab vom größeren, dieser Differenz setzt das Zeichen des größern Coefficienten vor, und die nämliche Buchstabengröße setzt einmahl genommen hinter dieselbe. Z. B. $8a^3 - 6a^2b^4 - 5a^3 + 7a^2b^4 + a^3 - a^3 = 3a^3 + a^2b^4$.

Sind aber alle Terminen heterogen: so ist keine Reduction möglich.

Beweis. Dieser ist aus der Definition der Reduction (79) in Verbindung mit der Lehre von positiven, und negativen Größen (67 folg.) von selbst klar.

81. Aufgabe. Buchstabengrößen zu addiren.

Auflösung. Reduciret dieselbe (80); so ist addiret, wie aus der Definition der Addition (33) und der Reduction (79) erhellet. Z. B.

$$\begin{array}{r} 4a + 5a^2b - 3a \\ \underline{3a - 2a^2b + 3a} \\ S = 7a + 3a^2b. \end{array}$$

Zweyter Artikel.

Von der Subtraction.

82. Aufgabe. Buchstabengrößen von einander abzuziehen.

Auflösung. Verwandelt die Zeichen des Subtrahends in die entgegengesetzte, und addiret ihn zum Minuend. Z. B.

M. $5a^3 + 3a^2b - a^4 + 6$
S. $3a^3 - 2a^2b + a^4 - 6$
$- \quad + \quad - \quad +$

D. $2a^3 + 5a^2b - 2a^4 + 12.$

Beweis I. Das positive Subtrahiren, ist eben so viel, als dasselbe negativ genommen, addiren; und das negative Subtrahiren, ist eben so viel, als dasselbe positiv genommen, addiren. (74)

Beweis II. Jeder Minuend kann heißen $\pm$ M, und jeder Subtrahend $= \pm$ S. Nun ist die nach der aufgestellten Regel erhaltene Differenz $\pm$ M $\mp$ S die richtige, weil, wenn sie addirt wird zum Subtrahend $\pm$ S, der Minuend $\pm$ M herauskömmt. Denn es ist $\pm$ M $\mp$ S $\pm$ S $= \pm$ M (nach 81) Also wird auch nach der gegebenen Regel richtig subtrahiret. (38)

83. Zusatz. Also ist $-2b - (-6b) = -2b + 6b = 4b$, item $7 - (-8) = 7 + 8 = 15$ etc. (Vergl. Anmerk. 2. §. 40.)

Drit-

Dritter Artikel.

Von der Multiplication.

84. Aufgabe. Buchstabengrößen mit einander zu multipliciren.

Auflösung. Beobachtet folgende Regeln:

I. Regel. Die nämlichen Zeichen der Factoren geben im Facto +, verschiedene aber geben —, nämlich es ist

I) + a × + b = + ab (76)
II) — a × — b = + ab
III) + a × — b = — ab
IV) — a × + b = — ab

Beweis für I. + a mit + b multipliciren, heißt, das + a so oft, und so zu sich addiren, wie oft, und wie die Einheit im Multiplicator enthalten ist. (41) Nun ist aber die Einheit in + b enthalten b^mahl positiv: also muß auch + a zu sich selbst b^mahl positiv gesetzt, d. i. das Factum muß positiv werden.

Beweis für II. Denn — a mit — b multipliciren, heißt das — a zu sich selbst b^mahl negativ setzen. Aber das Negative negativ setzen, heißt es positiv setzen (74), also giebt — und — im Facto +.

Beweis für III. Denn + a multipliciren mit — b, heißt, das positive a zu sich b^mahl negativ setzen; wo von selbst erhellet, daß das Factum negativ sey.

Beweis für IV. Denn — a mit + b multipliciren giebt 1) das nämliche Factum, als + b × — a (43). Da nun + b × — a im Facto — giebt (nach dem vorigen Beweise): so muß auch — a × + b ein negatives Factum geben. 2) Heißt — a mit + b multipliciren, so viel, als — a zu sich selbst b^mahl positiv setzen. Aber ein negatives positiv setzen, ist eben so viel, als dasselbe, als negative Größe, setzen. Denn etwas positiv setzen, heißt, dasselbe nicht negativ setzen. Nun giebt das Negative negativ gesetzt ein positives (74): also das negative nicht negativ (d. i. positiv) gesetzt, muß nothwendig ein Negatives geben.

II. Regel. Sind beyde Factoren monomische Größen, und sind sie durch verschiedene Buchstaben bezeichnet: so setzt sie nur neben einander ohne die Zeichen + und — in der Mitte. (76) Z. B. $a \times b = ab$. Sind aber die nämlichen Buchstaben in beyden Factoren: so setzt den gemeinschaftlichen Buchstaben im Facto einmahl, und gebt ihm zum Exponenten die Summe der Exponenten aller Buchstaben in beyden Factoren, welche die nämlichen sind. Z. B. $a^3 \times a^2 = a^5 = aaaaa = aaa \times aa$. Item $ab^2 \times ab^4 = a^2 b^6$. Allgemein $a^m \times a^n = a^{m+n}$ und $a^m \times a^m = a^{2m}$. Die Richtigkeit dieser Regel ergiebt sich aus der Natur der Exponenten (77), verglichen mit dem Begriffe der Multiplication, und dem Wahlsatze (76).

III.

III. Regel. Auch die Coefficienten der Factoren müssen unter einander multipliciret werden. Z. B. $3a \times -4ab = -12a^2b$. Denn nennt man allgemein den Multiplicand $= M$ und seinen Coefficienten $= a$ den Multiplicator $= N$, und seinen Coefficienten $= b$: so ist $aM \times bN = aMbN$ (76) $= abMN = a \times b \times MN$.

IV. Regel. Sind die Factoren polynomisch: so multipliciret nach den drey vorigen Regeln alle Terminen des Multiplicand's durch alle einzelne Terminen des Multiplicators; und summiret die Partialproducte. Z. B.

es sey { der Multiplicand $= 4a^2 - 5a^m b^3$
{ der Multiplicator $= 2a^3 - 4a^1 b^n$

---

so ist das Factum $= 8a^5 - 10a^{3+m}b^3 - 16a^3b^n + 20a^{m+1}b^{3+n}$.

Beweis. Jeder polynomische Multiplicand $a + b + c$ etc. kann heißen $= M$ und jeder polynomische Multiplicator $r + s + t$ etc. $= N$. Das Factum MN zeigt an, daß M, oder $a + b + c$ etc. so oft und so zu sich addiret sey, wie oft, und wie die Einheit in N, oder in $r + s + t$ etc. enthalten ist. Aber in $r + s + t$ etc. ist die Einheit $(r + s + t$ etc.$)$ $=$ mahl enthalten, d. i. r^{mahl}, mehr s^{mahl}, mehr t^{mahl} ꝛc. also muß auch M oder $a + b + c$ etc. zu sich addiret werden r^{mahl}, $+ s^{mahl}$, $+ t^{mahl}$ ꝛc., d. i. es muß multipliciret werden, wie die Regel vorschreibt.

Vierter Artikel.

Von der Division.

85. Aufgabe. Buchstabengrößen zu dividiren.

Auflösung. Die hier möglichen Hauptfälle sind I) die Division der monomischen, II) der polynomischen Literalgrößen. Für die Findung des Quotus in beyden Fällen gelten folgende Regeln.

I. Regel. Die nämlichen Zeichen im Dividend, und im Divisor geben im Quotus +, verschiedene aber —.

Beweis I. Im Quotus muß die Einheit eben so oft, und so enthalten seyn, wie oft, und wie der Divisor im Dividend enthalten ist (53); also giebt erstens + und + im Quotus +. Denn der positive Divisor ist im positiven Dividende positiv enthalten: also muß auch im Quotus die Einheit positiv gesetzt werden. Zweytens — und — giebt im Quotus +; denn der negative Divisor ist im negativen Dividende positiv (d. i. nicht negativ) enthalten, wie aus der Natur positiver und negativer Größen erhellet: also muß auch die Einheit im Quotus positiv gesetzt werden. Drittens — und + giebt im Quotus —. Denn der positive Divisor ist im negativen Dividende negativ enthalten; und der negative

ative Divisor ist im positiven Dividende wieder negativ enthalten; wie die Natur positiver und negativer Größen lehrt: also muß auch in beyden Fällen der Quotus negativ werden.

Beweis II. Jeder Dividend kann heißen $= D$, der Divisor $= d$, und Quotus $= q$. also ist $D = dq$ (54). Dividiret man nun das Factum dq durch den einen Factor d: so muß der andere q der Quotus werden (56), und zwar muß seyn 1) $\frac{+dq}{+d} = +q$, 2) $\frac{-dq}{-d} = +q$, 3) $\frac{-dq}{+d} = -q$ 4) $\frac{+dq}{-d} = -q$, weil sonst der Quotus mit dem Divisor multipliciret nicht gleich wird dem Dividende. (54. 55.)

II. Regel. Der Coefficient des Dividend's wird durch den Coefficienten des Divisors dividiret. Denn der Quotus muß anzeigen, wie oft und wie der Buchstabendivisor, so oft und so genommen, wie oft und wie die Einheit in seinem Coefficienten steckt, enthalten sey in dem Buchstabendividende, so oft und so genommen, wie oft und wie die Einheit in seinem Coefficienten enthalten ist. Dazu ist aber die Befolgung der gegebenen Regel nothwendig: also.

III. Regel. Sind der Dividend und der Divisor monomisch; und sind beyde durch verschied-

schiedene Buchstaben bezeichnet: so wird die Divisi-
on bloß angezeigt. Z. B. $\frac{ab}{cd}$. Dieser Ausdruck
ist dann der gesuchte Quotus. (31)

IV. Regel. Haben der monomische Divi-
end, und Divisor die nämlichen Buchstaben, mit gleich-
en Exponenten: so werden entweder diese Buchstaben
mit denselben Exponenten weggelassen, und was übrig
bleibt, wird als Quotus angesetzt, oder man ziehet von
dem Exponens des Dividend's den des Divisors ab,
und läßt den gemeinschaftlichen Buchstaben im Divisor
weg. Z. B. $\frac{ab}{a} = b$, oder $= a^{1-1} b = a^{\circ} b$;

allgemein $\frac{a^m}{a^m} = \frac{1\, a^m}{1\, a^m} = 1$ oder $= a^{m-m} = a^{\circ}$, und

$\frac{a^m b}{a^m c} = \frac{b}{c} = \frac{a^{\circ} b}{c}$, und $\frac{a^m}{a^m c} = \frac{1}{c} = \frac{a^{\circ}}{c}$.

Beweis. Ist der nach dieser Regel erhalt-
ene Quotus eine ganze Zahl: so ergiebt sich die
Richtigkeit desselben aus dem Zusatze (55). Ist er
aber ein Bruch, wie $\frac{a^m b}{a^m c} = \frac{b}{c}$: so läßt sich die
Richtigkeit desselben so demonstriren. Es sey $\frac{b}{c}$
$= q$: so ist $b = c\, q$; also auch $\frac{a^m b}{a^m c} = \frac{a^m c q}{a^m c} = q$ (55),

mit-

mithin $\frac{b}{c} = \frac{a^m b}{a^m c}$ nach dem Grundsatze X (32).*

Hieraus folgt, daß gleich vielfache Größen (46) den nämlichen Quotus geben, als die einfachen.

V. Regel. Haben die nämlichen Buchstaben im monomischen Dividende, und Divisor nicht gleiche Exponenten: so ziehe man entweder den Exponens des Divisors ab von jenem des Dividend's, und lasse dann den nämlichen Buchstaben im Divisor weg: oder man mache, so weit es möglich ist, aus den im Dividende und Divisor vorkommenden gleich vielfachen Größen die einfachen. Z. B. nach der ersten Weisung ist: $\frac{a^2 b}{a}$

$= a^{2-1} b = ab$, oder allgemein $\frac{a^{2m} b^n}{a^m b^m} =$

$a^{2m-m} b^{n-m} = a^m b^{n-m}$, und $\frac{a b^m}{b^{2m}} = a b^{-m}$.

den Beweis hierfür lehrt der Zusatz (55). Und nach der zweyten Weisung ist $\frac{a b^m}{b^{2m}} = \frac{a \times b^m}{b^m \times b^m} = \frac{a}{b^m}$.

Den Beweis dafür liefert der Zusatz im Beweise der vorhergehenden Regel IV. —

VI. Ist entweder der Dividend oder der Divisor allein polynomisch; oder sind es beyde; und kömmt in allen Terminen sowohl des Dividend's, als des Divisors der nämliche Buchstabe vor: so dividiret nach den vorausgehenden Regeln alle einzelne Terminen sowohl des Dividend's als des Divisors durch den gemeinschaftlichen Buchstaben mit dem kleinsten Exponenten. Z. B. $\frac{ax+bx}{x} = a+b$

und $\frac{ax+bx}{cx} = \frac{a+b}{c}$; $\frac{ax}{bx-cx^2} = \frac{a}{b-cx}$; $\frac{a}{a+ab}$

$= \frac{1}{1+b}$ etc.

Beweis. Diesen liefert der Zusatz im Beweise der vorausgehenden 4ten Divisionsregel.

VII. Regel. Kömmt aber nicht der nämliche Buchstabe in jedem Terminus des polynomischen Dividend's und Divisor's vor: so dividiret den ersten Terminus des Dividend's mit einem Terminus des Divisor's, der in jenem genau enthalten ist. Den Quotus multipliciret mit dem ganzen Divisor, und zieht das Product vom Dividende ab: in den Rest dividiret aufs neue mit dem nämlichen vorher angenommenen Terminus des Divisor's, und verfahrt mit dem Quotus, wie vorhin, bis nichts mehr vom Dividende übrig bleibt. Z. B.

D. $a^2 - 2ab + b^2$ $a^2 - ab$ $- +$	d. $a - b$ q. $a - b$
$-ab + b^2$ $-ab + b^2$ $+ \quad -$	
0	

Beweis. Dieſen lehrt der Zuſatz (55). Bleiben aber mehrere Terminen übrig: ſo zeigt die Diviſion bloß an. Z. B. $\frac{5c^3 - 4ad + f}{c - g}$.

86. Zuſatz 1. Jede Größe mit dem Exponens 0 iſt $= 1$. Denn es iſt nach der 4ten Diviſionsregel allgemein $\frac{a^m}{a^m} = 1 = a^{m-m} = a^0$: mithin $a^0 = 1$ nach dem Grundſatz X (32).

87. Zuſatz 2. Jede Größe mit einem negativen Exponenten iſt gleich ihrem Coefficienten dividirt durch die nämliche Größe mit demſelben Exponenten, aber poſitiv genommen. Denn es iſt allgemein $\frac{a\,b^m}{b^{2m}} = ab^{-m} = \frac{a}{b^m}$ (nach der 5ten Diviſionsregel.): mithin iſt $2^{-1} = \frac{1}{2}$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$ etc.

Des Ersten Kapitels der Elementar-Arithmetik Zweyter Theil.

Lehre von der Abmessung ganzer Zahlen.

88. Lehrsatz. Die Summe, wie auch die Differenz zweyer Zahlen, wovon die Eine gerade, die andere aber ungerade ist (25. II), ist ungerade.

Beweis. Jede gerade Zahl kann heißen $= 2m$, und jede ungerade $= 2n \pm 1$, nun ist sowohl die Summe beyder $= 2m + 2n \pm 1$ als die Differenz $= 2m - 2n \mp 1$ ungerade: also.

89. Lehrsatz. Die Summe, wie auch die Differenz zweyer geraden Zahlen ist gerade.

Beweis. Es ist $2m \pm 2n$ eine gerade Zahl: also.

90. Lehrsatz. Die Summe wie auch die Differenz zweyer ungeraden Zahlen ist gerade.

Beweis. Die Summe zweyer ungeraden ist $= 2m \pm 1 + 2n \pm 1 = 2m + 2n \pm 2$ mithin gerade. — Und die Differenz ist $= 2m \pm 1 - (2n \mp 1) = 2m \pm 1 - 2n \mp 1 = 2m - 2n$, mithin gerad.

91. Lehrsatz. Das Product aus zwey geraden Zahlen wie auch aus einer geraden, und einer ungeraden Zahl ist gerade; aus zwey ungeraden aber ungerade.

Beweis. Es ist I) $2m \times 2n = 4mn$, eine gerade Zahl.

II) $2m \times 2n \pm 1 = 4mn \pm 2m$, eine gerade Zahl.

III) $2m \pm 1 \times 2n \pm 1 = 4mn \pm 2m \pm 2n + 1$, eine ungerade Zahl.

92. Erklärung. Eine Primzahl ist diejenige, welche keine andere Factoren hat, als die Einheit, und sich selbst. Z. B. 1, 3, 5, 7, 11, 13 ꝛc. Das Gegenstück ist die zusammengesetzte Zahl, d. i. jene, welche zwey Factoren hat, die nicht die Einheit, und die Zahl selbst sind. Z. B. $4 = 2 \times 2$, $6 = 3 \times 2$, $9 = 3 \times 3$, etc. Relative Primzahlen (Numeri inter se primi) sind jene, welche keinen gemeinschaftlichen Factor haben, außer die Einheit. Z. B. 3 und 25 ꝛc. Hieraus erhellet, was relativ zusammengesetzte Zahlen sind: (Numeri inter se non primi) z. B. 7 und 21 ꝛc.

93. Erklärung. Das Maß einer Zahl ist jeder genaue d. i. keinen Rest lassende Divisor derselben. Das gemeinschaftliche Maß mehrerer Zahlen ist jeder genaue, und gemeinschaftliche

Divisor derselben. Z. B. 4 ist das gemeinschaftliche Maß von 8, 12, 16, 20 ꝛc. Das größte gemeinschaftliche Maaß (mensura communis maxima) ist der größtmögliche genaue und gemeinschaftliche Theiler mehrerer Zahlen. Z. B. 12 ist das größte gemeinschaftliche Maß von 12, 24, 36 ꝛc.

94. Lehrsatz. Mißt ein Divisor den Dividend: so sind alle Factoren desselben im Dividende enthalten, und wenn dieß letztere nicht Statt findet: so mißt er auch den Dividend nicht.

Beweis. Im ersten Falle ist das Product aus dem Divisor in den Quotus gleich dem Dividende: also müssen auch die Factoren beyder die nämlichen seyn, als die Factoren des Dividend's. — Umgekehrt, wenn die Factoren des Divisors nicht enthalten sind im Dividende: so ist das Factum aus dem Divisor in den Quotus als ganze Zahl, nicht gleich dem Dividende, mithin mißt der Divisor dann auch nicht den Dividend.

95. Zusatz 1. Von relativen Primzahlen (92) mißt also keine die andere.

96. Zusatz 2. Ist der Quotus eine ganze Zahl: so ist sowohl der Divisor, als der Quotus ein Maß vom Dividende; mithin jeder ge-

eigenschaftet, die Quantität (3) eines Quanti

(des

(des Dividends) zu bestimmen. Dagegen wird durch die einfache Subtraction (30) bloß die Differenz zwischen zweyen Größen gefunden; und sonach sind beyde in dieser Hinsicht wesentlich von einander unterschieden. (Siehe §. 52).

97. Zusatz 3. Da sowohl der Multiplicand, als Multiplicator das Product mißt (56): so dient auch die Multiplication zur Bestimmung der Quantität eines Quanti; da durch die einfache Addition bloß ein Adgregat, das den Summanden gleich ist, gefunden wird. Hiersaus versteht sich der obige Zusatz (42).

98. Lehrsatz. Eine jede Zahl N, die mehrere Factoren a, b, c, d, etc. hat: kann gemessen werden sowohl durch alle einzelne Factoren, als durch die zusammengesetzten aus zweyen, dreyen ꝛc.

Beweis. Es ist N = abcd. Nun ist der Lehrsatz richtig in Ansehung des Facti a b c d (nach (56), also auch in Ansehung der Zahl N.

99. Lehrsatz. Mißt die Zahl m die Zahlen a und b: so mißt sie auch I) die Summe beyder a + b II) die Differenz a — b.

Beweis. Es sey $\frac{a}{m} = n$, und $\frac{b}{m} = q$: so ist a = mn und b = mq (54); mithin I) a + b =

$mn + mq = m(n+q)$. II) $a - b = mn - mq = m(n-q)$. Nun mißt m sowohl das $m(n+q)$, als das $m(n-q)$ nach dem Zusatze (56): also mißt m auch I) $a + b$, II) $a - b$.

100. Lehrsatz. Mißt die Zahl m die Zahlen a, und $a + b$: so mißt m auch das b.

Beweis. Es sey $\frac{a}{m} = q$ und $\frac{a+b}{m} = n$: so ist $a = mq$ und $a + b = mn$, mithin $a + b - a = b = mn - mq = m(n-q)$; nun mißt m das $m(n-q)$ nach dem Zusatze (56), also auch das b.

101. Lehrsatz. Mißt m die Zahl a: so mißt m auch jedes Vielfache von a, z. B. das bfache $= ab$.

Beweis. Es sey $\frac{a}{m} = q$; so ist $a = mq$.

Multipliciret man nun beydes durch b: so kömmt wieder Gleiches heraus (Grundsatz VIII. 32.), also $ab = bmq = m \times bq$. Nun mißt m das Factum $m \times bq$, also auch das ab.

102. Lehrsatz. Mißt das Product mq die Zahl n: so messen auch die einzelnen Factoren m und q die Zahl n.

Beweis. Es sey $\frac{n}{mq} = c$; so ist $n = cmq$.

Nun ist cmq meßbar durch m, und durch q (56), also auch n.

103. Lehrsatz. Mißt c die Zahl a, und a die Zahl b: so mißt auch c die Zahl b.

Beweis. Es sey $\frac{a}{c} = m$, und $\frac{b}{a} = n$; so ist $a = cm$, und $b = an = cmn$. Nun mißt c das Factum cmn (56), also auch das ihm gleiche b.

104. Zusatz. Das Maß einer jeden zusammengesetzten Zahl N ist irgend eine Primzahl. Denn es sey der kleinste Factor von N die Zahl m. Wäre nun m keine Primzahl: so müßte m noch durch eine andere Zahl $= c$ meßbar seyn. Aber dann wäre auch c das Maaß von N (nach 103), mithin wäre m nicht der kleinste Factor von N, welches der Voraussetzung widerspricht. *

105. Zusatz. Jede Zahl ist entweder eine Primzahl, oder hat doch eine Primzahl zum Maße.

106. Lehrsatz. Bleibt bey der Division einer größeren Zahl $= a$ durch eine kleinere $= b$ ein Rest $= d$; und erhält man, wenn man den Divisor b durch diesen Rest d dividiret, wieder einen Rest $= f$, und immer so fort, bis man endlich auf den Rest $= 1$ kömmt; so sind die Zahlen a und b relative Primzahlen.

Beweis. Wären a und b nicht relative Primzahlen: so müßten sie ein gemeinschaftliches

* Lorenz Elem. der r. Math. §. 67 – §. 77.

Maß haben, das größer wäre, als 1. Dieses sey =m. Also müßte m sowohl a, als b messen, mithin auch das Vielfache von b (101), nämlich bc: also auch a—bc (99) =d. Also auch de (101), mithin auch b—de (99) = f, also auch fg (101) mithin auch d—fg (99) =h=1 das ist, m, das nach der Voraussetzung größer ist, als 1, müßte das 1 messen, was sich widerspricht; also.

a. 19 14 d. 5	b. 7 c. 2
b. 7 5 f. 2	d. 5 e. 1
5 d. 4 h. 1	f. 2 g. 2

107. Lehrsatz. Eine Zahl, deren Ziffern, wenn man sie bloße einfache Einheiten bedeuten läßt, zusammengenommen eine Zahl geben, die genau durch 3 theilbar ist; ist auch genau durch 3 theilbar, wenn man die Ziffern derselben nach ihrem wahren Werthe nimmt.

Beweis. Eine jede solche Zifferzahl =N kann aufgelöst werden in eine Summe von Neunern = M, und in eine Summe von einfachen Einheiten = S, so daß N=M+S ist. Dieß

folgt

folgt aus der Natur der Zifferzahlen, in wiefern ihr Werth nach dem decadischen Gesetze bestimmt wird, überhaupt; und ist insbesondere an der Zahl 924 ersichtlich. Denn es ist 924 = 900 + 20 + 4 Einheiten. Nun ist 900 = 90 Zehnern = 90 Neunern + 90 Einheiten = 90 Neunern + 9 Zehnern = 99 Neunern + 9 Einheiten. Eben so ist 20 = 2 Zehnern = 2 Neunern + 2 Einheiten. Also ist 924 = 101 Neunern + 15 Einheiten. Zieht man sonach alle Neuner aus den Zehnern der vorgelegten Zahl ab; so bedeuten die Ziffern derselben bloße einfache Einheiten, deren Summe = S nach der Voraussetzung genau durch 3 theilbar ist. Nun ist aber auch die Summe der weggenommenen Neunern = M genau durch 3 theilbar, indem 3 das 9 mißt, mithin auch ein jedes Vielfache von 9 (101): also mißt nun auch das 3 die Summe M + S (99) = N.

108. Lehrsatz. Eine jede Zahl, die am Ende eine Nulle oder 5 hat, kann genau durch 5 dividiret werden.

Beweis. Jede nach der Nulle, oder nach dem 5 gegen die rechte Hand zu folgende Ziffer bedeutet decadische Einheiten, welche Decaden genau durch 5 theilbar sind. Nun ist auch die Zahl 5 genau theilbar durch 5 und in 0 ist 5 ent-

halten

halten o^mahl: sonach ist die ganze Zahl genau durch 5 theilbar.

109. Aufgabe. Das größte gemeinschaftliche Maß zweyer Zahlen, die nicht relative Primzahlen sind, zu finden.

Auflösung. Theilet die größere Zahl a durch die kleinere b. Dann das b durch den Rest d. Dann das d durch den Rest f und so weiter, bis ihr auf einen Divisor z. B. im beyliegenden Schema auf h kommt, welcher keinen Rest läßt. Dieser Divisor h ist dann das gesuchte größte gemeinschaftliche Maß von a und b.

a. 124 118 d. 6	b. 118 c. 1
b. 118 114 f. 4	d. 6 e. 19
d 6 4 h. 2 f. 4 4 0	f. 4 g. 1 h. 2 2

Beweis I. h ist das gemeinschaftliche Maß von a und b. Denn h mißt nach der Voraussetzung das f. also auch das gfache von f d. i. fg. h mißt aber auch sich selbst: also mißt h auch h + fg (99)

= d

$\equiv$ d. Also mißt h auch de (101) mithin auch de + f $\equiv$ b. Also auch bc, mithin auch bc + d $\equiv$ a. Also mißt h sowohl das a als das b, mithin ist h das gemeinschaftliche Maß von a und von b, welches das Erste war.

II) Wäre h nicht das größte gemeinschaftliche Maß von a und b, so müßte noch ein größeres möglich seyn. Dieses sey $\equiv$ k. Also müßte k, da es nach der Annahme das b mißt, auch bc messen (101), mithin, da k auch das a nach der Annahme mißt, müßte k auch messen das a—bc (99) $\equiv$ d. also würde k auch messen das de (101), mithin auch b—de (99) $\equiv$ f. also würde k auch messen fg (99), also auch d—fg (99) $\equiv$ h. also müßte k, das nach der Voraussetzung größer ist, als h, eben dieses h messen, was widersprechend ist. Sonach ist h das größte gemeinschaftliche Maß von a und b, welches das zweyte war.

IIIo. Zusatz. Aus dem vorhergehenden Beweise II folgte, daß jede Zahl k, welche zwey andere a und b mißt, auch das gemeinschaftliche größte Maaß h derselben messen müsse. *Lorenz l. c.

III. Aufgabe. Das größte gemeinschaftliche Maß von drey Zahlen m, n, o, die keine relative Primzahlen sind, zu finden.

Auf-

Auflösung. Suchet das größte gemeinschaftliche Maß von m und n; (nach 109) dieses sey = d. Wenn nun d auch die dritte Zahl o mißt: so ist d das gemeinschaftliche größte Maß von m, n, o. Denn wäre ein größeres möglich; so müßte dasselbe auch das d messen (110), was widersprechend ist. Ist aber d zwar das gemeinschaftliche größte Maß von m und n, mißt aber die Zahl o nicht: so suchet das größte gemeinschaftliche Maß = f von o und d. Dieses f ist dann das größte gemeinschaftliche Maß von m, n, o.

Beweis. Nach der Voraussetzung mißt f das d; d aber mißt m und n, also mißt f auch m und n. (103). Aber f mißt auch das o, also ist f das gemeinschaftliche Maß von m, n, o, und zwar das größte, weil, wenn m, n, o ein gemeinschaftliches Maß = q hätten, das größer wäre, als f: so müßte q die Zahlen m und n messen, und sonach auch ihr größtes gemeinschaftliches Maß = d (110), und mithin auch die Zahen d und o, und sonach auch die Zahl f (110), was widersprechend ist. * Lorenz l. c.

112. Zusatz. Also muß die Zahl, welche drey andere mißt, auch das gemeinschaftliche größte Maß dieser drey anderen messen — und so versteht sich die Methode von selbst das größte gemeinschaftliche Maß von 4 ꝛc. Zahlen zu finden, welche nicht relative Primzahlen sind.

113.

113. Aufgabe. Alle Maße einer gegebenen Zahl zu finden.

Auflösung. Versuchet die Division der gegebenen Zahl durch die Primzahlen 2, 3, 5, 7 ꝛc. bis ihr auf einen genauen Divisor derselben kommt. Dividiret dann den erhaltenen Quotus auf die nämliche Art, und zwar so lange fort, bis er = 1 wird. Machet dann aus diesen Divisoren zusammengesetzte Zahlen, und zwar erstens jedesmahl aus zwey, dann aus drey ꝛc. Divisoren, und ihr habt alle Maße der gegebenen Zahl gefunden. Findet ihr keinen genauen Divisor außer 1, und die gegebene Zahl selbst: so ist die Zahl eine Primzahl. Das Ganze ist im beygesetzten Schema ersichtlich.

390	2	5	3	13
	195	39	13	1

Die einfachen Divisoren sind hier 2, 5, 3, 13

Die aus zwey zusammengesetzten sind

2.3 = 6	3.5 = 15
2.5 = 10	3.13 = 39
2.13 = 26	5.13 = 65

Die aus drey Factoren zusammengesetzten sind

2.3.5 = 30	2.5.13 = 130
2.3.13 = 78	3.5.13 = 195

Der aus 4 zusammengesetzte Divisor ist 2.5.3.13 = 390.

Beweis. Dieser liegt in dem Zusatze (56) und dem Lehrsatze (98).

Zweytes Kapitel

Von den Stammrechnungsarten in gebrochenen Zahlen.

114. Erklärung. Wird irgend ein Ganzes, als Einheit, in mehrere gleiche Theile getheilt gedacht, und nimmt man von diesen gleichen Theilen entweder Einen, oder mehrere: so entsteht ein Bruch (Fractio). Z. B. theilt man den Gulden, als das Ganze, oder die Einheit in 60 gleiche Theile: so sind ein, oder 30 von diesen 60 gleichen Theilen ein Bruch.

115. Zusatz 1. Jede Größe ist also ein Bruch, in wiefern man sie mit einer anderen größeren gleichartigen vergleicht. Z. B. 1 Gulden ist ein Bruch relativ zu einer Caroline, oder zu einem Ducaten. Denn von jener ist er der 11te, von diesem der 5te Theil. Umgekehrt ist die Größe, welche in Vergleichung mit einer größeren Quantität ein Bruch ist, in Vergleichung mit einer kleineren, die einen oder mehrere Theile von der ersten ausmacht, ein Ganzes. Ganze und gebrochene Größen sind also relative Begriffe.

116. Zusatz 2. Zu einem Bruche werden zwey Zahlen erfordert, 1) der Nenner (denominator)

nator) d. i. jene Zahl, welche anzeigt, in was für gleiche Theile das Ganze, von dem die Rede ist, getheilt sey 2) Der Zähler (Numerator) d. i. die Zahl, die anzeigt, wie viele von jenen gleichen Theilen genommen werden. Beyde werden durch einen Zwischenstrich gesondert, so, daß der Zähler oben, der Nenner unten steht; z. B. $\frac{2}{3}$ Gulden d. i. der Gulden ist in 3 gleiche Theile getheilt, und davon werden 2 genommen.

117. Zusatz 3. Der Bruch ist ein Vielfaches von einem Theile des Ganzen, oder der Einheit. Daher heißt er auch eine gebrochene Zahl, im Gegensatze der ganzen Zahl, als welche ein Vielfaches von der Einheit selbst ist.

118. Erklärung. Der Denominator eines Bruches richtet sich entweder nach keinem bestimmten Gesetze, und kann dann eben so verschieden seyn, als der Numerator, so, daß es eben so nothwendig ist, ihn auszudrücken, als den Numerator; oder er richtet sich nach einem bestimmten Gesetze, so, daß, wenn dieses Gesetz einmahl bekannt ist, die Denominatoren aller übrigen auf den ersten Bruch folgenden Brüche sofort bekannt sind, und sonach es nicht nothwendig ist, dieselben besonders auszudrücken. Die Brüche von jener Art heißen gemeine, (weil diese gemeinhin (vulgo) verstanden werden, wo von Brüchen schlechthin, d. i. ohne Beywort die Rede ist). Die Brüche aber von

dieſer Art ſind nicht gemeine (Fractiones non vulgares), und dieſe ſind wieder entweder decimal — oder duodecimal — oder ſexageſimal-brüche ꝛc., je nachdem die Denominatoren derſelben entweder dieſes Geſetz befolgen, daß der kleinſte ſey = 10, die nächſtfolgenden aber = 10^2, 10^3, 10^4 ꝛc., oder dieſes, daß der kleinſte ſey = 12, die folgenden aber = 12^2, 12^3, 12^4 ꝛc., oder dieſes, daß der kleinſte ſey = 60, die folgenden aber = 60^2, 60^3 ꝛc.

119. Zuſatz. Daher zerfällt die Lehre von den Brüchen in 2 Hauptttheile. I) Von den gemeinen Brüchen, II) von den nicht gemeinen. Und dieſer IIte Haupttheil kann wieder ſo viele Unterabtheilungen haben, als das Geſetz verſchieden ſeyn kann, nach dem ſich der Nenner richtet.

I.

Von den gemeinen Brüchen.

120. Erklärung. Die gemeinen Brüche heißen eigentliche (Fractiones vulgares propriæ), wenn der Zähler kleiner iſt, als der Nenner; uneigentliche aber (impropriæ, ſ. ſpuriæ), wenn der Zähler entweder dem Nenner gleich, oder größer iſt, als derſelbe.

121. Zuſatz 1. Der eigentliche Bruch iſt kleiner, als die Einheit. Der uneigentliche aber,

bey

bey dem der Zähler dem Nenner gleich ist, ist = 1, und, wenn der Zähler größer ist, als der Nenner, ist er selbst > 1. Z. B. $\frac{3}{3} = 1$, $\frac{50}{50} = 1$, allgemein $\frac{a}{a} = 1$. Aber $\frac{4}{3}$ Gulden > 1. Denn dieser Bruch zeigt an, daß der Gulden, als die in 3 gleiche Theile getheilte Einheit, ganz, und noch überdieß ein Drittel's Gulden dazu genommen werden solle, und er sollte sonach eigentlich als eine vermischte Zahl $= 1\frac{1}{3}$ ausgedrückt werden.

122. Zusatz 2. Jeder Bruch ist ein Quotus, der aus der Division des Zählers durch den Nenner entspringt. Denn ist der Bruch ein eigentlicher: so sind nur Ein, oder einige Theile des Nenners im Zähler enthalten, wo sonach nothwendig der Quotus ein Bruch ist, der anzeigt, wie oft ein Theil der größeren Zahl in der kleineren enthalten sey (Anmerk. zu 51). Ist aber der Bruch ein uneigentlicher (120): so enthält er das Ganze, von dem die Rede ist, so oft, wie oft der Nenner im Zähler enthalten ist, wo wieder von selbst erhellet, daß ein solcher Bruch ein Quotus sey, der aus der Division des Zählers durch den Nenner entsteht.

123. Zusatz 3. Von gleichnamigen Brüchen (d. i. solchen, welche den nämlichen Nenner haben) ist derjenige der größte, welcher den größten

Zähler hat. Denn das Ganze, oder die Einheit ist hier überall in gleich große Theile getheilt; mithin derjenige Bruch der größte, wo die meisten von jenen gleich großen Theilen erhalten werden, d. i. wo der Zähler der größte ist. Von Brüchen aber, die gleiche Zähler, aber ungleiche Nenner haben, ist jener der größte, dessen Nenner der kleinste ist. Denn wegen der Gleichheit des Zählers bekömmt man in allen diesen Brüchen gleich viele von jenen gleichen Theilen, in welche die Einheit getheilt ist, also da das meiste, wo die gleichen Theile der Einheit die größten sind, d. i. wo der kleinste Nenner ist. Ist aber sowohl der Nenner, als Zähler verschieden: so muß man, um zu beurtheilen, welcher Bruch der größte sey, die gegebenen Brüche erst in gleichnamige verwandeln.

124. Aufgabe. Gegebene Brüche in gleichnamige zu verwandeln.

Auflösung. Multipliciret den Zähler eines jeden Bruchs mit den Nennern aller übrigen; diese Producte machet zu eben so vielen Zählern, und setzt unter sie, als gemeinschaftlichen Nenner, das Product aus allen Nennern der gegebenen Brüche. Z. B. $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, = \frac{8}{12}, \frac{9}{12}$. Allgemein: $\frac{a}{m}, \frac{b}{n}, \frac{c}{p}, = \frac{anp}{mnp}, \frac{bmp}{mnp}, \frac{cmn}{mnp}$.

Bew.

Bew. Die einfachen Größen geben den nämlichen Quotus, als ihre gleich vielfache. (Zusatz im Beweise der IVten Regel der Literal-Division. 85, vergl. mit 122.)

125. Zusatz. Die Reduction gegebener Brüche auf gleichnamige kann dann auf einem kürzeren Wege geschehen, wenn der größte Denominator derselben von der Art ist, daß jeder der übrigen Denominatoren, wenn man ihn mit irgend einer Zahl multipliciret, dem größten Denominator gleich wird. Nur muß man alsdann auch jeden Numerator der übrigen Brüche durch dieselbe Zahl multipliciren, mit welcher der Denominator multipliciret wurde.

Z. B. $\frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{5}{16}, \frac{3}{32}, = \frac{3.8}{4.8}, \frac{1.4}{8.4}, \frac{5.2}{16.2},$

$\frac{3}{32}, = \frac{24}{32}, \frac{4}{32}, \frac{10}{32}, \frac{3}{32}.$

126. Aufgabe. Eigentliche Brüche auf den kleinsten Ausdruck zu bringen.

Auflösung. Suchet das größte gemeinschaftliche Maaß vom Nenner und Zähler (109.), dividiret damit sowohl in den Zähler als Nenner; der herauskommende Bruch ist der gesuchte kleinste Ausdruck des gegebenen Bruches: z. B. $\frac{161}{207} = \frac{7}{9}$, und $\frac{637}{1001} = \frac{7}{11}$ (nach dem Zusatze im Beweise

weise der IV. Regel der Literal-Division. 85.) Haben aber der Zähler, und Nenner kein größeres gemeinschaftliches Maaß als 1: so ist keine Reduction auf einen kleineren Ausdruck möglich.

127. Aufgabe. Einen uneigentlichen Bruch auf einen kleineren Ausdruck zu bringen.

Auflösung. Dividiret den Zähler durch den Nenner, und bringt den, dem Quotus etwa anhängenden eigentlichen Bruch nach der Regel (126) auf den kleinsten Ausdruck. Z. B. $\frac{20}{6} = 3\frac{2}{6} = 3\frac{1}{3}$.

128. Zusatz. Bey heterogenen Zifferzahlen, welche in einander verwandelt werden können, enthält die Zahl von der kleineren Art einen oder mehrere gleiche Theile von der Einheit in der Zahl der nächst höheren Art. Z. B. 4 Stunden sind 4 von den 24 gleichen Theilen, (Stunden) welche einen Tag ausmachen. Mithin kann die Zahl der kleineren Art als ein Bruch gelten, dessen Zähler diese Zahl selbst, der Nenner aber die Zahl ist, welche anzeigt, in wie viele gleiche Theile von der Größe, als die Einheit in der Zahl der nächst kleineren Art ist, eine Einheit der Zahl von der nächst größeren Art getheilt sey. Z. B. 4 Stunden = 4 Vier und Zwanzigsteln eines Tages = $\frac{4}{24}$, 3 Minuten = $\frac{3}{60}$teln einer Stunde.

129. Aufgabe. Eine ganze Zahl a in einen Bruch, dessen Nenner gegeben ist, zu verwandeln.

Auflösung. Es sey der Nenner des verlangten Bruches $= d$. Da $a = \frac{a}{1}$ ist: so multipliciret a und 1 mit d; das Product $\frac{ad}{d}$ ist der verlangte Bruch, weil $\frac{ad}{d} = a$.

130. Aufgabe. Gemeine Brüche zu addiren.

Auflösung. Machet sie zu gleichnamigen; addiret dann bloß die Zähler, und schreibt den gemeinschaftlichen Denominator darunter. Z. B.

$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{24} = \frac{2.8}{3.8} + \frac{3.6}{4.6} + \frac{5}{24} =$

$\frac{16 + 18 + 5}{24} = \frac{39}{24} = 1\frac{15}{24} = 1\frac{5}{8}$. Allgemein ist $\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p} = \frac{anp + bmp + cmn.}{mnp}$

Beweis. Heterogene Theile der Einheit können nicht summiret werden, wie aus dem Begriffe der Summe (33.) erhellet. Also müssen die ungleichnamigen Brüche vorerst in gleichnamige ver-

verwandelt, und dann, wie von selbst erhellet, bloß die Numeratoren addiret, und dieser Summe der gemeinschaftliche Denominator untergesetzt werden.

131. Aufgabe. Einen gemeinen Bruch von einer gegebenen Zahl abzuziehen.

Auflösung. I. Regel. Ist der Bruch von einem Bruche abzuziehen: so verwandelt beyde erst in gleichnamige, und nehmet dann die Subtraction bloß in den Numeratoren vor, mit Beybehaltung des gemeinschaftlichen Denominators. Z. B. $\frac{3}{4} - \frac{2}{7} = \frac{21 - 8}{28} = \frac{13}{28}$. Allgemein $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$

II. Regel. Ist ein eigentlicher Bruch von einer ganzen Zahl abzuziehen: so entlehnt von dieser ganzen Zahl eine Einheit; verwandelt diese in einen Bruch, der mit dem abzuziehenden Bruche gleichnamig ist, und subtrahiret dann nach der vorausgehenden Regel. Z. B. $2 - \frac{3}{7} = 1 + \frac{7}{7} - \frac{3}{7} = 1\frac{4}{7}$. Ist aber der abzuziehende Bruch ein uneigentlicher von der Art, wo der Zähler größer ist, als der Nenner: so nehmt von dem Minuende so viele Einheiten, als nöthig sind, damit, wenn ihr sie in einen Bruch verwandelt habt, der mit dem abzuziehenden Bruche gleichnamig ist, die Subtraction geschehen könne. Z. B. $6 - \frac{20}{7} = 3 + \frac{21}{7} - \frac{20}{7} = 3\frac{1}{7}$

III. Regel. Ist ein Bruch von einer gemischten Zahl abzuziehen: so ziehet, wenn der dem Ganzen anhängende Bruch gleich, oder größer ist, als der abzuziehende, den abzuziehenden Bruch bloß von dem, der ganzen Zahl anhängenden Bruche ab. Z. B. $2\frac{3}{4} - \frac{2}{4} = 2\frac{1}{4}$. Eben so $3\frac{2}{7} - \frac{1}{9} = 3\frac{18}{63} - \frac{7}{63} = 3\frac{11}{63}$. Ist aber der dem Ganzen anhängende Bruch kleiner, als der abzuziehende: so verwandelt so viele Einheiten, als nöthig sind, von der ganzen Zahl in einen Bruch, der mit dem anhängenden Bruche gleichnamig ist, addiret dann diesen Bruch zu dem anhängenden, und vollbringet die Subtraction, wie vorhin. Z. B. $3\frac{1}{9} - \frac{2}{7} = 3\frac{7}{63} - \frac{18}{63} = 2 + \frac{63}{63} + \frac{7}{63} - \frac{18}{63} = 2\frac{70}{63} - \frac{18}{63} = 2\frac{52}{63}$

Beweis. Dieser erhellet wieder so fort aus dem Begriffe der Subtraction (37), auf Brüche angewendet.

132. Lehrsatz. Wenn man den Nenner eines Bruchs $\frac{a}{b}$ mit einer ganzen Zahl $= n$ multipliciret: so ist der herauskommende Bruch $= \frac{a}{bn}$ von dem ersten Bruche $\frac{a}{b}$

der eben so vielste Theil, als die Zahl n anzeigt, d. i. der Bruch $\frac{a}{bn}$ ist der n^te Theil von $\frac{a}{b}$.

Beweis. Verwandelt man die Brüche $\frac{a}{b}$, und $\frac{a}{bn}$ in gleichnamige: so ist $\frac{a}{b} = \frac{abn}{b^2n}$ und $\frac{a}{bn} = \frac{ab}{b^2n}$. Nun aber ist $\frac{ab}{b^2n}$ der n^te Theil von $\frac{abn}{b^2n}$. Denn $\frac{ab}{b^2n}$ ist der so vielste Theil von $\frac{abn}{b^2n}$, als die Zahl anzeigt, welche bestimmt, wie oft $\frac{ab}{b^2n}$ von $\frac{abn}{b^2n}$, d. i. ab von abn abgezogen werden könne. (131. I.) Es kann aber ab von abn n^mahl abgezogen werden, weil ab in abn n^mahl enthalten ist: also ist $\frac{ab}{b^2n}$ der n^te Theil von $\frac{abn}{b^2n}$, mithin auch $\frac{a}{bn}$ der n^te Theil von $\frac{a}{b}$.

133. Aufgabe. Gemeine Brüche zu multipliciren.

Auf-

Auflösung. I. Regel. Ist ein Bruch zu multipliciren durch eine ganze Zahl, oder eine ganze Zahl durch einen Bruch: so wird bloß der Numerator durch die ganze Zahl multipliciret, und der Denominator unverändert darunter gesetzt. Z. B.

$\frac{3}{4} \times 2 = \frac{6}{4} = 1\frac{2}{4} = 1\frac{1}{2}$, allgemein: $\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}$, und $a \times \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$.

Beweis I. Den Bruch $\frac{a}{b}$ multipliciren durch c, heißt $\frac{a}{b}$ so oft und so zu sich addiren, wie oft und wie die Einheit in c steckt. (41) In c ist aber die Einheit c^mahl enthalten: also muß auch $\frac{a}{b}$ zu sich selbst c^mahl addiret werden. Diese Addition geschieht aber bloß in dem Numerator, (130) also muß a zu sich selbst c^mahl addiret, d. i. mit c multiplicirt werden, mithin ist $\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}$. Da nun $\frac{a}{b} \times c = c \times \frac{a}{b}$ (43): so ist auch $c \times \frac{a}{b} = \frac{ac}{b}$, und eben dieses läßt sich auch aus dem Begriffe der Multiplication des c

durch

durch $\frac{a}{b}$ ableiten. Denn $c \times \frac{a}{b}$ heißt: $c = \frac{c}{1}$ soll so oft und so zu sich addiret werden, wie oft und wie die Einheit in $\frac{a}{b}$ steckt. Die Einheit steckt aber in $\frac{a}{b}$ nicht ganz, sondern nur der b^{te} Theil von ihr a^{mahl} genommen: also muß auch nur der b^{te} Theil von $\frac{c}{1}$, d. i. $\frac{c}{b}$ (132) zu sich selbst a^{mahl} addiret, d. i. $\frac{c}{b}$ mit a multipliciret werden, wo $\frac{ac}{b}$, wie vorhin, herauskömmt.

Beweis II. Es sey $\frac{a}{b} = q$: so ist $a = bq$ mithin $\frac{a}{b} \times c = qc$; es ist aber auch $\frac{ac}{b} = \frac{bqc}{b} = qc$, also $\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}$.

II. Regel. Brüche werden mit Brüchen multiplicirt, wenn man die Zähler unter sich, und die Nenner unter sich multipliciret. Z. B. $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. Allgemein $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Beweis. I. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ heißt: $\frac{a}{b}$ soll so oft und so zu sich addiret werden, wie oft und wie die Einheit in $\frac{c}{d}$ enthalten ist. In $\frac{c}{d}$ aber ist nur ein d:er Theil der Einheit c^mahl genommen enthalten; also muß auch nur der d^te Theil von $\frac{a}{b}$, der $= \frac{a}{bd}$ ist (132), zu sich selbst c^mahl addiret, d. i. $\frac{a}{bd}$ mit c multipliciret werden, wo das Factum $= \frac{ac}{bd}$ ist.

Beweis II. Es sey $\frac{a}{b} = m$, $\frac{c}{d} = n$; so ist $a = bm$, $c = dn$, sonach $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = mn$.

Es ist aber auch $\frac{ac}{bd} = \frac{bmdn}{bd} = mn$ also $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

III. Regel. Sind gemischte Zahlen zu multipliciren: so multipliciret die einzelnen Terminen des Multiplicands's durch die einzelnen Terminen des Multiplicators. Z. B. $3\frac{2}{3} \times 4 = 12\frac{8}{3} = 14\frac{2}{3}$; eben so $3\frac{2}{3} \times 4\frac{3}{4} = 12 + \frac{8}{3} + \frac{2}{4} + \frac{6}{12} = 16\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 16 + \frac{16 + 6 + 12}{24} = 16 + \frac{34}{24}$

$= 17\frac{10}{24} = 17\frac{5}{12}$, allgemein: $\left[a + \frac{b}{c}\right] m =$

$am + \frac{bm}{c}$, und $\left[a + \frac{b}{c}\right]\left[m + \frac{d}{e}\right] = am +$

$\frac{bm}{c} + \frac{ad}{e} + \frac{bd}{ce} = am + \frac{bem + acd + bd}{ce}$ (125.)

Beweis. Es ist $\left[a + \frac{b}{c}\right] m = \frac{ac + b}{c}$

$\times m = \frac{acm + bm}{c} = am + \frac{bm}{c}$. Eben so ist

$\left[a + \frac{b}{c}\right]\left[m + \frac{d}{e}\right] = \frac{ac + b}{c} \times \frac{me + d}{e} =$

$\frac{acem + bme + acd + bd}{ce} = am + \frac{bm}{c} + \frac{ad}{e} + \frac{bd}{ec}$.

134. Zusatz 1. So oft der Multiplicator ein eigentlicher Bruch ist: ist das Product kleiner, als der Multiplicand, weil dann der Multiplicand nicht ganz genommen wird, um das Factum zu erhalten.

135. Zusatz. 2. Soll ein Bruch von einem Bruche (fractio de fractione, s. fractio fractionis) genommen werden z. B. $\frac{a}{b}$ von $\frac{c}{d}$: so werden beyde

mul=

multipliciret, und das Factum $\frac{ac}{bd}$ ist das Verlangte. Nach dem Lehrsatze (132), verbunden mit der I. Regel (133).

136. **Aufgabe. Gemeine Brüche zu dividiren.**

Auflösung. I. Regel. Ist ein Bruch durch eine ganze Zahl zu dividiren: so multipliciret den Nenner desselben durch die ganze Zahl. Z. B. $\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{8}$. Allgemein $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$.

Beweis I. Es ist $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{bc}{b}$. Nun aber ist $\frac{a}{b}$ durch $\frac{bc}{b}$ dividiren soviel, als eine Zahl finden, welche anzeigt, wie oft und wie der Divisor $\frac{bc}{b}$ enthalten sey im Dividende $\frac{a}{b}$ (51); $\frac{bc}{b}$ ist aber in $\frac{a}{b}$ so oft und so enthalten, wie oft und wie es von $\frac{a}{b}$, d. i. wie oft und wie bc von a abgezogen werden kann, d. i. wie oft und wie bc in a enthalten ist. bc aber ist in a so oft, und so enthalten, wie oft und wie die Einheit in $\frac{a}{bc}$ enthalten ist

(85. Regel III,): also heißt $\frac{a}{b}$ durch $\frac{bc}{b}$ oder durch

c dividiren soviel, als die Zahl $\frac{a}{bc}$ finden: mithin

ist $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$.

Beweis II. Es sey $\frac{a}{b} = q$: so ist $a =$

bq, mithin ist $\frac{a}{b} : c = q : c = \frac{q}{c}$, es ist aber auch

$\frac{a}{bc} = \frac{bq}{bc} = \frac{q}{c}$, also $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$.

II. Regel. Ist ein Ganzes durch einen Bruch zu dividiren: so multipliciret das Ganze durch den umgestürzten gebrochenen Divisor. Z. B. $3 : \frac{2}{5} =$

$3 \times \frac{5}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$. Allgemein $a : \frac{b}{c} = a \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$.

Beweis I. Es ist $a : \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} : \frac{b}{c}$. Aber

$\frac{ac}{c}$ durch $\frac{b}{c}$ dividiren, heißt einen Quotus finden, welcher anzeigt, wie oft und wie der Divisor $\frac{b}{c}$

$\frac{b}{c}$ enthalten sey im Dividende $\frac{ac}{c}$, d. i. abgezogen werden könne von $\frac{ac}{c}$ d. i. wie oft und wie b in ac enthalten sey. Es ist aber b in ac enthalten $\left[\frac{ac}{b}\right]$ mahl: also ist $a:\frac{b}{c} = \frac{ac}{b}$.

Beweis II. Es sey $\frac{b}{c} = q$: so ist $b = cq$, mithin $a:\frac{b}{c} = a:q = \frac{a}{q}$. Es ist aber auch $\frac{ac}{b} = \frac{ac}{cq} = \frac{a}{q}$; also $a:\frac{b}{c} = \frac{ac}{b}$.

III. Regel. Ist ein Bruch durch einen Bruch zu dividiren: so stürzt den gebrochenen Divisor um, und multipliciret beyde Brüche. Z. B $\frac{3}{4}:\frac{2}{7} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{2} = \frac{21}{8} = 2\frac{5}{8}$. Allgemein $\frac{a}{b}:\frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

Beweis. I. Es ist $\frac{a}{b}:\frac{c}{d} = \frac{ad}{bd}:\frac{bc}{bd}$.

Nun aber ist $\frac{bc}{bd}$ in $\frac{ad}{bd}$ so oft und so enthalten, wie

oft und wie $\frac{bc}{bd}$ von $\frac{ad}{bd}$ d. i. bc von ad abgezogen werden kann d. i. wie oft und wie bc in ad enthalten ist. bc aber ist in ad enthalten $\left[\frac{ad}{bc}\right]$ mahl:

also ist auch $\frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd} = \frac{ad}{bc}$, mithin auch $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

Beweis II. Es sey $\frac{a}{b} = q$, $\frac{c}{d} = m$;

so ist $a = bq$, $c = dm$, mithin $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = q : m$

$= \frac{q}{m}$. Es ist aber auch $\frac{ad}{bc} = \frac{bqd}{bdm} = \frac{q}{m}$:

also $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.

IV. Regel. Sind gemischte Zahlen zu dividiren: so verwandelt die Ganze in Brüche, die mit den ihnen anhängenden Brüchen gleichnamig sind, und dividiret dann nach den vorausgehenden Regeln.

Z. B. $3\frac{2}{3} : 2\frac{3}{5} = \frac{11}{3} : \frac{13}{5} = \frac{11}{3} \times \frac{5}{13} = \frac{55}{39}$

$= 1\frac{16}{39}$. Allgemein $\left[a + \frac{b}{c}\right] : \left[d + \frac{f}{g}\right] =$

$\frac{ac+b}{c} : \frac{dg+f}{g} = \frac{ac+b}{c} \times \frac{g}{dg+f} = \frac{acg+bg}{cdg+cf}$.

Be-

Beweis. Dieser erhellet aus der Aufgabe (129), und aus dem Beweise der Regel III. (136.)

Anmerkung.

Ein Generalbeweis aller dieser Divisionsregeln ist: der nach diesen Regeln erhaltene Quotus mit dem Divisor multipliciret, giebt den Dividend; also wird nach diesen Regeln recht dividiret. (55).

137. Zusatz. Ist der Divisor ein eigentlicher Bruch: so ist der Quotus immer größer, als der Dividend. Denn je kleiner der Divisor ist, desto größer ist der Quotus, wenn der Dividend der nämliche bleibt; nun ist der Quotus gleich dem Dividende, wenn der Divisor $= 1$ ist; also muß der Quotus größer seyn, als der Dividend, wenn der Divisor ein eigentlicher Bruch d. i. < 1 ist.

II.

Von den nichtgemeinen Brüchen (118), in wiefern sie Decimal- oder Sexagesimal-Brüche sind.

138. Erklärung. Decimal-(zehntheilige) Brüche sind Brüche, deren Nenner die Zahl 10 mit den Exponenten 1, 2, 3, ꝛc. ist, mithin Brüche, welche Zehntel, Hundertel, Tausendel ꝛc. der Einheit enthalten. Z. B.

$$\frac{7}{10}, \frac{6}{100}, \frac{3}{1000} \text{ ꝛc.} = \frac{7}{10^1}, \frac{6}{10^2}, \frac{3}{10^3} \text{ ꝛc.}$$

Staats-Bibliothek Bamberg

Anmerkung.

Um die Länge z. B. der Aecker zu messen, nimmt man in der Geometrie als Einheit die Ruthe an, welche in 10 Schuhe getheilt ist. Der Schuh enthält 10 Zolle, der Zoll 10 Linien ꝛc. Also sind die Schuhe Zehntel, die Zolle Hundertel, und die Linien Tausendel der Ruthe.

139. Zusatz 1. Die Decimalbrüche kommen mit ganzen Zifferzahlen darin überein, daß, so wie die auf die Ziffer der einfachen Einheiten folgenden Ziffern der ganzen Zahlen vorgestellt werden können als Ziffern einfacher Einheiten, multiplicirt mit der Zahl 10, deren Exponens = 1, 2, 3, 4 ꝛc. ist; eben so auch die Ziffern der Numeratoren der Decimalbrüche vorgestellt werden können als Ziffern ganzer einfacher Einheiten, multiplicirt mit der Zahl 10, deren Exponens auch = 1, 2, 3, 4 ꝛc. ist, nur mit dem Unterschiede, daß dort die Exponenten der Zahl 10 positiv sind, und gegen die linke Hand zu wachsen; hier aber als negative gegen die linke Hand zu wachsen. So ist z. B. $5637 = 5.10^3 + 6.10^2 + 3.10^1 + 7.10^0$, und

$$4 + \frac{7}{10} + \frac{6}{100} + \frac{5}{1000} \ldots = 4.10^0 + 7.10^{-1} + 6.10^{-2} + 5.10^{-3} \ldots \quad (87.)$$

Wenn also nach derjenigen Ziffer der ganzen Zahl, welche einfache Einheiten bedeutet, ein Punct,

oder

oder ein Strichlein gesetzt wird: so können die Ziffern der Decimalbrüche gegen die rechte Hand zu in der nämlichen Ordnung folgen, wie die Ziffern der ganzen Zahlen gegen die Linke. Z. B. $34,763 =$

$3.10^{1} + 4.10^{0} + 7.10^{-1} + 6.10^{-2} + 3.10^{-3}$. Sind keine ganze Zahlen gegeben, oder fehlt an einem Orte der dahin gehörige Decimalbruch: so setzt man einen Zerus an. Z. B. $0,763$

$= 0.10^{0} + 7.10^{-1} + 6.10^{-2} + 3.10^{-3}$.

Hieraus erhellet nun so fort die Art und Weise, die Decimalbrüche anzuschreiben und auszusprechen.

140. Zusatz 2. So wie der Werth ganzer Zifferzahlen von der Rechten zur Linken immer um das Zehnfache steigt (28): eben so steigt auch der Werth der Decimalbrüche immer um das Zehnfache von der rechten zur linken. Denn jeder von der linken gegen die rechte Hand folgende Decimalbruch ist der 10te Theil des nächstvorhergehenden; also ist auch jeder Vorhergehende das Zehnfache des nächstfolgenden, in wiefern bloß auf den Local-Werth beyder gesehen wird. So ist z. B. $10^{-2} = \frac{1}{100}$ zehnmahl größer, als $10^{-3} = \frac{1}{1000}$, und $10^{-1} = \frac{1}{10}$ zehnmahl größer, als $10^{-2} = \frac{1}{100}$ &c.

Daher werden die Decimalbrüche mit Rechte eben

so behandelt, wie die Ganzen, nach dem decadischen Gesetze sich richtenden Zahlen. *)

141. Zusatz 3. Der Werth der Decimalbrüche wird nicht geändert, wenn man zur Rechten auch noch so viele Decimalnullen hinzuwirft. Denn diese Nullen zeigen an, daß von den Decimaltheilen derjenigen Ordnung, die der Stelle des hinzugesetzten Zerus entspricht, keiner genommen werde; mithin wird der Werth des Decimalbruches selbst nicht geändert. So ist z. B. $2,5 = 2,50 = 2,500$ ꝛc. Selbst einer jeden ganzen Zahl können Decimalnullen beygesetzt werden, so viel man will. Z. B. $3 = 3,00 = 3,000$ ꝛc.

142. Zusatz 4. Jeder Decimalbruch wird in einen gemeinen Bruch verwandelt, wenn man ihm die Einheit mit so vielen Nullen untersetzt, als Decimalziffern sind. Z. B. $0,4 = \frac{4}{10}$; $0,432 = \frac{432}{1000} = \frac{4}{10} + \frac{3}{100} + \frac{2}{1000}$; eben so ist

$$3,42 = \frac{342}{100} = 3 + \frac{4}{10} + \frac{2}{100} = \frac{300}{100} + \frac{40}{100} + \frac{2}{100}.$$

Allgemein kann jeder Decimalbruch vor-

---

*) J. F. Lorenz Elemente der Mathematik. I. Th. 2te Ausg. §. 204 — 216.

vorgestellt werden durch N. $10^{-m} = \frac{N}{10^m}$. wo N so viele Decimalziffern, (als ganze Zifferzahlen betrachtet), vorstellen kann, als man will, und m eine Zahl ist, welche die Stelle der Decimalziffer von der niedrigsten Ordnung ausdrückt.

143. Aufgabe. Decimalbrüche zu addiren.

Auflösung. Schreibt sie so untereinander, daß die Ganze unter den Ganzen, Zehntel unter den Zehnteln ꝛc. stehen, und addiret dann wie in ganzen Zahlen. Fehlt irgendwo eine Decimalziffer, so füllet die Stelle mit einem Zerus oder mit Puncten aus.

Z. B.	653, 306	2. 4506..	12, 9004
	2, 428	8, 737032	0, 65..
	655, 734	11, 187632	13, 5504

Beweis. Dieser liegt darin, daß die Decimalbrüche, wie die ganzen Zahlen behandelt werden müssen. (140)

144. Aufgabe. Decimalbrüche zu subtrahiren.

Auflösung. Diese, wie der Beweis dafür, erhellet aus dem Verfahren bey der Addition. (143)

Z.B.	3,546	3,5..	= 3,500	8	=	8,0000
	0,537	2,345	= 2,345	5,0765	=	5,0765
	3,009		1,155			2,9235

145. Aufgabe. Decimalbrüche zu multipliciren.

Auflösung. Multipliciret, wie in ganzen Zahlen. In dem Facto schneidet von der Rechten gegen die Linke so viele Ziffern, als Decimalziffern, ab, wie viele die Zahl der Decimalziffer-Stellen in beyden Factoren ausweiset. Sind im Facto nicht so viele Ziffern vorräthig: so ersetzet sie durch Nullen gegen die linke Hand zu, und an dem Platze der Ganzen setzt eine Nulle.

Z. B.	3,456	0,042	3.05
	2,5	0,04	2.
	17280	0,00168	6.10
	6912		
	8,6400		

Beweis I. Jeder decimalgebrochene Multiplicand kann vorgestellt werden durch $M.10^{-m}$, und jeder decimalgebrochene Multiplicator durch $N.10^{-n}$, (142) so daß M und N die beyden Decimalfactoren, als ganze Zahlen betrachtet, vorstellen, m und n aber Zahlen von so vielen Einheiten sind, als erfodert werden, um die Stelle der Decimalziffer von der niedrigsten Ordnung in beyden Factoren anzuzeigen. Nun ist $M.10^{-m} \times N.10^{-n} = MN.10^{-m-n} = MN.10^{-(m+n)}$. Also erhellet vorerst, daß die Decimalbrüche wie ganze Zahlen multipliciret werden. Weil aber ferner $m+n$ die Summe der Decimalstellen in beyden Factoren ist, und $10^{-(m+n)}$, womit MN (das Factum

um der Decimalfactoren, als ganze Zahlen betrachtet) multipliciret ist, anzeigt, wie viele Decimalstellen in dem Facto MN von der rechten zur linken abgeschnitten werden müssen: so erhellet die Richtigkeit der ganzen gegebenen Regel.

Beweis. II. Verwandelt den Decimalbruch im Multiplicande, und im Multiplicator, wie auch das nach der gegebenen Regel erhaltene Product in gemeine Brüche, (142) multipliciret dann die beyden Factoren, als gemeine Brüche: so wird das nämliche Factum herauskommen. Da nun die Multiplication der gemeinen Brüche richtig ist, wenn sie nach den oben (133) demonstrirten Regeln geschieht: so muß auch die nach der gegebenen Regel geschehene Multiplication der Decimalbrüche richtig seyn.

146. Aufgabe. Decimalbrüche zu dividiren.

Auflösung. Hat der Dividend nicht so viele Decimalziffern, als der Divisor: so setzet ihm so viele Decimalnullen bey, (141) bis die Anzahl der Decimalstellen beyderseits gleich ist. Ist dann der Dividend, wenn er als ganze Zahl betrachtet wird, kleiner, als der Divisor, auch als ganze Zahl betrachtet; so werfet zum Dividende noch mehrere Decimalnullen. Dividiret dann, wie in ganzen Zahlen, und im Quotus schneidet von der Rechten zur Linken soviele Decimalziffern ab, als die Zahl anzeigt, welche herauskömmt, wenn die

Anzahl der Decimalstellen des Divisors von der Anzahl der Decimalstellen des Dividend's abgezogen wird. Bleibt bey jener Division ein Rest: so setzet diesem so viele Decimalnullen bey, als nöthig sind, um die Division auf die genannte Weise fortsetzen zu können, bis man auf einen so kleinen Decimaltheil stößt; der von keinem beträchtlichen Belange mehr ist.

Z. B. $\frac{2,46}{0,3} = 82 = 8,2$. Eben so ist $\frac{0,02463}{0,03}$ $= 821 = 0,821$, und $\frac{6,453}{3} = 2151 = 2,151$,

ferner $\frac{5,07}{0,003} = \frac{5,070}{0,003} = 1690$, und $\frac{6}{2,32} =$

$\frac{6,000000}{2,32} = 2,5862$.

Beweis I. Jeder decimalgebrochene Dividend kann vorgestellt werden durch $M. 10^{-m}$ (142) und jeder decimalgebrochene Divisor durch $N. 10^{-n}$.

Der Quotus ist $\frac{M. 10^{-m}}{N. 10^{-n}} = \frac{M}{N}. 10^{-m+n} = \frac{M}{N}$

$10^{-(m-n)} = Q. 10^{-(m-n)}$, wenn man $\frac{M}{N} =$

Q setzt. Da erhellet nun 1) daß die beyden Decimalbrüche, wie die ganzen Zahlen M und N durch einander dividirt werden müssen. 2) Daß der so er-

erhaltene Quotus $\frac{M}{N}$, oder Q multipliciret werden müsse durch $10^{-(m-n)}$, wo m — n die Zahl der Decimalstellen im Dividende, weniger der Zahl der Decimalstellen im Divisor anzeigt. 3) Daß, weil $Q \cdot 10^{-(m-n)} = \frac{Q}{10^{m-n}}$ ist, man im Quotus Q von der Rechten zur Linken soviele Decimalstellen abschneiden müsse, als die Differenz m — n anzeigt.

Beweis II. Wenn die beyden gegebenen Decimalbrüche in gemeine Brüche verwandelt, und dann diese dividiret werden: so erhält man einen Quotus, der dem nach der gegebenen Regel erhaltenen Decimalquotus gleich ist. Also muß auch dieser der richtige seyn.

Beweis III. Der nach der gegebenen Regel erhaltene Quotus, mit dem Divisor multipliciret, ist gleich dem Dividende; also.

147. Zusatz 1. Bleibt bey der Division ganzer Zahlen ein Rest: so kann man ihm Decimalnullen beysetzen, so viele, als man will, wo dann durch fortgesetzte Division auch Decimalziffern für den Quotus gefunden werden. Z. B. $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3} = 2\frac{1,000\ldots}{3} = 2,333\ldots$

148. Zusatz 2. Kömmt man bey der Division immer auf einen Rest, wie im vorausgehenden Beyspiele: so läßt sich für den Quotus immer fort eine neue Decimalziffer finden. Will man nun gleichwohl endigen: so sehe man, ob die nächst zu findende Quotusziffer $>$, oder $<$ 5, oder $=$ 5 sey. Ist sie $>$ 5, und ihr wollt sie doch weglassen: so vermehret die nächst vorhergehende um 1; z. B. der Quotus sey $=$ 3, 4 6, und die nächste noch zu findende Decimalziffer sey $=$ 6 (Tausendel); wollt ihr diese nun weglassen: so schreibt als Quotus an 3,47. Denn in 3,47 nehmt ihr zwar 4 Tausendel zu viel, weil erst $\frac{6}{1000} + \frac{4}{1000} = \frac{10}{1000} = \frac{1}{100}$ ist; aber in 3,46 nehmt ihr den Quotus um $\frac{6}{1000}$ zu klein, welches ein größerer Fehler ist, als der erste. Wäre dagegen die noch zu findende Decimalziffer $=$ 5: so ist der Fehler gleich groß, man mag schreiben 3,46, oder 3,47. Ist sie aber $<$ 5: so ist der Fehler größer, wenn man schreibt 3,47, als 3,46, wie von selbst erhellt. Eben so ist klar, daß statt 3,451 richtiger geschrieben werde, 3,5 als 3,4, wenn man die Hundertel und Tausendel nicht ansetzen will.

149. Zusatz 3. Um einen gemeinen Bruch in einen Decimalbruch umzuändern: so verfahrt nach dem Zusatze (147. 148.)

150. Erklärung. Sechzigtheilige Brüche (Sexagesimalbrüche) sind jene, deren Denominator 60 ist mit den Exponenten 1, 2, 3, ꝛc. Z. B. Die Stunde ist = 60 Minuten, die Minute = 60 Secunden, die Secunde = 60 Tertien ꝛc. Also ist 1 Minute = $\frac{1}{60}$ Stunde, 1 Secunde = $\frac{1}{60}$ Minute, mithin = $\frac{1}{60 \times 60}$ Stunde ꝛc. Man bezeichnet die Ganzen durch ein über dieselben zur rechten Hand gesetztes 0, die 60tel (Minuten) durch ein Strichlein, die 3600tel (Secunden) durch 2 Strichlein über der Ziffer zur rechten Hand ꝛc. Z. B. $23^\circ\ 4'\ 3''\ 5'''$ ꝛc. = 23 Stunden, mehr 4 Minuten, 3 Secunden, 5 Tertien = $23^\circ + \frac{4^\circ}{60} + \frac{3^\circ}{60^2} + \frac{5^\circ}{60^3} \ldots\ldots$

Anmerkung.

In der Geometrie wird die Peripherie des Cirkels in 360 Grade, jeder Grad in 60 Minuten, jede Minute in 60 Secunden ꝛc. getheilt gedacht. Da finden sonach auch Sexagesimalbrüche statt.

151. Zusatz. Weil aus der Anzahl der Strichlein, die über dem Numerator eines Sexagesimalbruches stehen, der Denominator desselben sogleich erkennt werden kann; als welcher stäts = 60 mit einem Exponenten von so vielen Einheiten ist,

als die Zahl der Strichlein anzeigt: so wird der Denominator weggelassen, wie bey den Decimalbrüchen.

152. Aufgabe. Sexagesimalbrüche zu addiren, oder zu subtrahiren.

Auflösung. Verfahrt so, wie oben (63. 64.)

153. Aufgabe. Sexagesimalbrüche durcheinander zu multipliciren.

Auflösung. Multipliciret alle Terminen des Multiplicands durch die einzelnen Terminen des Muitiplicators, so, daß ihr, mit dem Terminus von der niedrigsten Ordnung im Multiplicator anfangend, den Partialproducten die Summe der Zeichen gebt, welche die Factores haben. Am Ende dieser Operation reduciret die Zahlen von der niedrigeren Ordnung auf Zahlen der höheren, (62) und addiret dann nach der vorigen Regel. (152.)

3. B.		3°	16′	40″	
			2°	15′	4″
			12″	64‴	160⁗
		45′	240″	600‴	
	6°	32′	80″		
	7°	22′	43″	6‴	40⁗

Beweis. Es ist

$$\begin{cases} 40'' \times 4'' = \frac{40}{60^2} \times \frac{4}{60^2} = \frac{160}{60^4} = 160'''' \\ 16' \times 4'' = \frac{16}{60^1} \times \frac{4}{60^2} = \frac{64}{60^3} = 64''' \\ 3^\circ \times 4'' = \frac{3}{1} \times \frac{4}{60^2} = \frac{12}{60^2} = 12'' \end{cases}$$

Gleichmäßig zeigt sich die Richtigkeit der übrigen Partialproducten. — Man kann die Multiplication, und den Beweis dafür auch so anstellen.

Es ist $3^\circ\ 16'\ 40'' = \frac{3}{1} + \frac{16}{60^1} + \frac{40}{60^2} = \frac{3.60^2}{60^2}$

$+ \frac{16.60}{60^2} + \frac{40}{60^2} = \frac{10800 + 960 + 40}{60^2} = \frac{11800}{60^2}$,

und $2^\circ\ 15'\ 4'' = \frac{8104}{60^2}$, mithin $3^\circ\ 16'\ 40'' \times 2^\circ\ 15'\ 4''$

$= \frac{11800}{60^2} \times \frac{8104}{60^2} = \frac{95627200}{60^4} = 95627200''''$,

Nun ist $\frac{95627200''''}{60''''} = 1593786''' + 40''''$, ferner

$\frac{1593786'''}{60'''} = 26563'' + 6'''$, und $\frac{26563''}{60''} = 442'$

$+ 43''$, endlich $\frac{442'}{60'} = 7^\circ\ 22'$: also $3^\circ, 16', 40'' \times$

$2^\circ, 15', 4'' = 7^\circ, 22', 43'', 6''', 40''''$. (62)

154. Aufgabe. Sexagesimalbrüche durcheinander zu dividiren.

Auflösung. I. Verwandelt den Dividend, und Divisor in Brüche, deren Denominator dem Denominator des in ihnen vorkommenden kleinsten Bruchs gleich ist; (61), addiret diese Brüche beyderseits, und dividiret sie nach den obigen Regeln (136), endlich suchet nach der obigen Anleitung (62) aus diesem Quotus wieder die Ganzen, Minuten, Secunden ꝛc. hervor. Z. B.

$$\text{D. } \frac{7^{\circ}, 22', 43'', 6''', 40''''}{2^{\circ}, 15', 4''} = \left\{\frac{7}{1} + \frac{22}{60^1} + \frac{43}{60^2} + \frac{6}{60^3} + \frac{40}{60^4}\right\} :$$

$$\left\{\frac{2}{1} + \frac{15}{60^1} + \frac{4}{60^2}\right\} =$$

$$\left\{\frac{7.60^4 + 22.60^3 + 43.60^2 + (6.60) + 40}{60^4}\right\} :$$

$$\frac{2.60^2 + (15.60) + 4}{60^2} = \frac{95627200}{60^4} : \frac{8104}{60^2} =$$

$$\frac{95627200}{60^4} \times \frac{60^2}{8104} = \frac{95627200}{60^2.8104} = \frac{95627200''}{8104} =$$

$11800''$.

Dieses nun dividiret durch $60''$ gibt $196' + 40''$. Fernet $196'$ durch $60'$ dividiret, giebt $3^{\circ} + 16'$; also ist

$$11800'' = 3^{\circ}\ 16'\ 40''.$$

Beweis. Dieser erhellet aus der Natur der Sache selbst.

Auflösung II. Dividiret mit dem ersten Terminus des Divisors in den ersten des Dividend's, dem Quotus gebt das Zeichen, welches heraus-kömmt, wenn das Zeichen des ersten Terminus des Divisors abgezogen wird vom Zeichen des ersten Terminus des Dividend's, multiplicirt dann den Quotus mit dem ganzen Divisor nach der vorigen Regel (153), und verfahret im übrigen, wie oben (66).

Z. B.

D.	7°	22′	43″	60‴	40⁗	d.	2°	15′	4″
	6°	45′	12″						
		37′	31″	6‴		q.	3°	16′	40″
		36′	1″	4‴					
	1′	30″	2‴	40⁗					
	oder								
		90″	2‴	40⁗					
		90″	2‴	40⁗					
	0								

Beweis I. Der auf diese Weise erhaltene Quotus mit dem Divisor multipliciret giebt den Dividend: also.

II. Der auf diese Weise erhaltene Quotus ist gleich dem Quotus, der herauskömmt, wenn man die Division nach der I. Auflösung (154) vollzieht; — also.

Anmerkung.

Ist bey der Division nach dieser 2ten Methode das Zeichen des Divisors größer, als das des Dividends, so ist das Zeichen des Quotus negativ. Will man nun dieses vermeiden: so multiplicire man sowohl den Dividend, als Divisor durch 60. Z. B. $\frac{3^\circ\ 4'\ 6''}{2'\ 5''} = \frac{3^\circ\ 4'\ 6'' \times 60}{2'\ 5'' \times 60} =$

$\frac{184^\circ\ 6'}{2'\ 5''} = 88^\circ\ 22'\ \frac{10''}{2'\ 5''}$. *)

Drittes Kapitel.

Von der Erhebung der Größen zu Potenzen, und Ausziehung der Wurzeln, sammt dem Calcul mit Wurzelgrößen.

155. Erklärung. Eine Potenz ist jede Größe, die entweder mit 1 oder mit sich selbst multiplicirt ist. Dort ist es die erste Potenz, hier aber entweder die 2te (Quadrat), oder die 3te (Cubus), oder 4te 2c. je nachdem die Größe mit sich

*) W. F. Wucherer's Anfangsgründe der Arithmetik. S. 230 — 231.

sich selbst entweder einmahl, oder 2^mahl, oder 3^mahl, ꝛc. multiplicirt ist. Z. B. $a^m \times a^m = a^{2m}$ ist das Quadrat von a^m; a^{3m} der Cubus, und a^{4m} die 4te Potenz von a^m. Jede Größe ist mit 1 multiplicirt, also die erste Potenz.

156. Erklärung. Die Größe, aus deren Multiplication mit sich selbst die Potenz entspringt, heißt die Wurzel (radix) von dieser Potenz. Die Wurzel eines Quadrats heißt Quadratwurzel; eines Cubus Cubikwurzel. Die Benennungen der Wurzeln höherer Potenzen richten sich nach den Benennungen dieser Potenzen selbst. Das Quadratwurzelzeichen ist $\sqrt{}$; z. B. $2 = \sqrt{4}$. Das Cubikwurzelzeichen $= \sqrt[3]{}$ z. B. $3 = \sqrt[3]{27}$. Allgemein ist das Zeichen der m^{ten} Wurzel $= \sqrt[m]{}$; die in das Zeichen eingeschriebenen Ziffern oder Buchstaben sind die Exponenten des Wurzelzeichens, und wo kein Exponens eingeschrieben ist, wird 2 als Exponens verstanden. Eine unmögliche Wurzel (radix surda) ist jene, welche sich nicht angeben läßt. Z. B. die Quadratwurzel von 7, wie dieses weiter unten (183) ausführlich gezeigt werden wird.

Erster Artikel.

Von der Erhebung gegebener Größen zu Potenzen.

157. Aufgabe. Eine Zifferzahl zu einer jeden durch eine ganze Zifferzahl bestimmten Potenz zu erheben.

Auflösung. Multiplicirt dieselbe mit sich so oft, als der, um eine Einheit verringerte Exponent der bestimmten oder verlangten Potenz anzeigt. Den Beweis giebt die Erklärung (155).

158. Aufgabe. Unverbundene Buchstabengrößen zu einer verlangten Potenz zu erheben.

Auflösung. Multipliziret den Exponenten eines jeden Factors der unverbundenen Größe mit der Zahl, welche den Grad der verlangten Potenz anzeigt. Ist die Größe ein Bruch: so erhebt sowohl den Zähler als Nenner auf die genannte Weise zu der verlangten Potenz. Z. B. $(4a^2 b^3)^2 = 4^2 a^{2.2} b^{3.2} = 16 a^4 b^6$, allgemein $(3a^3 b^n)^m = 3^{1.m} a^{3.m} b^{n.m} = 3^m a^{3m} b^{mn}$, und $\left(\frac{2 b^n}{3 c_r}\right)^m = \frac{2^m b^{mn}}{3^m c^{m r}}$, eben so ist $\left(\frac{23}{20}\right)^2 = \frac{529}{400}$, und $(3,2)^2 = 10,24$.

Beweis. Dieser erhellet wieder aus der Erklärung (155) verbunden mit den Regeln (133; 145).

159. Lehrsatz. Eine jede gerade Potenz (d. i. eine solche, deren Exponens eine gerade Zahl ist) ist positiv; die ungerade aber entweder positiv, oder negativ, je nachdem die Wurzel entweder positiv, oder negativ ist.

Beweis. Nennt man die Wurzel allgemein $= \pm A$, und jede gerade Zahl $= 2m$; so ist $\pm A)^{2m}$

der allgemeine Ausdruck der Aufgabe: eine beliebige Größe $\pm A$ zu einer beliebigen geraden Potenz zu erheben. Es wird aber $\pm A$ zur $2m^{ten}$ Potenz erhoben, wenn $\pm A$ so oft multiplicationsmäßig mit sich selbst verbunden wird, als in $2m$ die Einheit steckt. Da nun die Menge der Einheiten in $2m$ eine gerade Zahl ist: so ist auch die Menge der multiplicationsmäßig gesetzten $\pm A$ eine gerade Zahl. Nimmt man nun diese multiplicationsmäßig gesetzten $\pm A$ paarweise: so erhält man so viele Paare, als m d. i. die Hälfte der Zahl der multiplicationsmäßig gesetzten $\pm A$ beträgt, und jedes Paar ist $\pm A \times \pm A = +A^2$ (84. I. Regel). Da nun $+A^2$ m^{mahl} multiplicationsmäßig gesetzt $= +A^2)^m$, (77) d. i. der m^{ten} Potenz vom Quadrate $+A^2$ gleich, und diese $= +A^{2m}$ ist (158): so ist die Wahrheit des ersten Theils des Lehrsatzes augenfällig. Den zweyten Theil betreffend: so ist $\pm A)^{2m+1}$ der allgemeine Ausdruck der Aufgabe: eine beliebige Größe $\pm A$ zu einer beliebigen ungeraden Potenz zu erheben. Da nun $\pm A)^{2m+1} = \pm A)^{2m} \times \pm A$, (84. II. Regel) und $\pm A)^{2m} = +A^{2m}$ (nach dem vorigen Beweise): so ist auch $\pm A)^{2m+1} = +A^{2m} \times \pm A = \pm A^{2m+1}$ welches das zweyte war.

160. Zusatz. Die gerade Wurzel ist also entweder positiv oder negativ: aber die ungerade von einer positiven Potenz ist jederzeit positiv und von einer negativen negativ. Z. B.

$\sqrt[2n]{9} = \pm 3$; $\sqrt[3]{\pm 8} = \pm 2$. Daher ist auch $\sqrt[2n]{-d}$ eine unmögliche Größe (Quantitas impossibilis, seu imaginaria.)

161. Lehrsatz. Jede Größe mit einem gebrochenen positiven Exponenten ist gleich der Wurzel, deren Exponens der Denominator jenes Bruches ist, von der nämlichen Größe, mit einem Exponens, der dem Numerator jenes Bruches gleich ist.

d. i. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Beweis. Es ist $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{mn}{n}} = a^m$ (158), also ist a^m die n^{te} Potenz von $a^{\frac{m}{n}}$, mithin $a^{\frac{m}{n}}$ die n^{te} Wurzel von a^m, d. i. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

162. Zusatz. Also ist $\sqrt[2n]{-d} = -d^{\frac{1}{2n}} = -\left(d^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-d^{\frac{1}{n}}} = \sqrt{\left(\sqrt[n]{-d}\right)}$. Nun aber ist $\sqrt{-d}$ entweder eine mögliche negative Größe, wenn nämlich n ungerad ist; oder eine unmögliche Größe, wenn nämlich n eine gerade Zahl bedeutet. Also kann die imaginäre Größe $\sqrt[2n]{-d}$ unter einem doppelten Werthe betrachtet werden.

*Lorenz l. c. S. 103.

Anmerkung.

Wollte Jemand nach folgendem Calcul: $\sqrt{-4} = -4^{\frac{1}{2}} = -4^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{-4^2} = \sqrt[4]{16} = 2$

behaupten, daß $\sqrt{-4} = 2$ sey: so würde er sich trügen; denn es ist nicht $\sqrt[4]{-4^2} = \sqrt[4]{16}$, sondern $= \sqrt[4]{(-4 \times +4)} = \sqrt[4]{-16}$, welches eben eine so unmögliche Größe ist, als $\sqrt{-4}$.

163. Lehrsatz. Jede Größe mit einem gebrochenen negativen Exponens ist gleich ihrem Coefficienten, dividirt durch die Wurzel, deren Exponens der Nenner jenes gebrochenen Exponenten ist, von eben derselben Größe mit einem Exponens, der dem positiv genommenen Numerator jenes Bruches gleich ist, d. i.

$$ab^{-\frac{m}{n}} = \frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$$

Beweis Es ist $ab^{-\frac{m}{n}} = \frac{a}{b^{\frac{m}{n}}}$ (87) $=$

$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$ (161)

164. Aufgabe. Die Binomialwurzel $a \pm b$ zu einer jeden Potenz, deren Exponens eine ganze, und positive Zifferzahl ist, zu erheben.

Auflösung. Verfahret, wie oben (157) gelehret worden. Sonach ist

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab \pm b^2 = (a \pm b)(a \pm b)$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^2(a \pm b)$

$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4 = (a \pm b)^3(a \pm b)$

$(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5$ ꝛc.

165. Zusatz. 1) Jede der vorstehenden Potenzen hat einen Terminus mehr, als der Exponens der verlangten Potenz Einheiten hat. 2) Der Exponens des ersten Terminus a nimmt immer um 1 ab, bis er im letzten Terminus der Potenz verschwindet; der Exponens aber des Terminus b, welcher im ersten Terminus der Potenz gar nicht vorkömmt, nimmt immer um 1 zu, bis er dem Exponens der verlangten Potenz selbst gleich wird. 3) Der Coefficient des ersten und letzten Terminus der Potenz ist = 1, aber der Coefficient des 2ten Terminus der Potenz ist gleich dem Quotus aus der Division des größten Exponenten des Terminus a durch den kleinsten Exponenten des Terminus b, und der Coefficient des 3ten Terminus ist gleich dem Quotus aus der Division des Productes aus den beyden ersten Exponenten des Terminus a durch das Product aus den beyden ersten Exponenten von b. u. s. w. Diesem zu Folge kann die Erhebung des Binomiums $a + b$ zu einer Potenz, deren Exponens eine ganze positive Zifferzahl ist, z. B. zur 4ten, auch nach folgendem Schema geschehen:

I)	a^4	a^3	a^2	a^1	a^0
II)	b^0	b^1	b^2	b^3	b^4
III)	a^4b^0	a^3b	a^2b^2	ab^3	a^0b^4
IV)		$\frac{4}{1}$,	$\frac{4.3}{1.2}$,	$\frac{4.3.2}{1.2.3}$,	$\frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}$.
V)	$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$				

Wo

Wo in I) die Termini stehen, welche a in der 4ten Potenz giebt,

in II) die Termini von b in der 4ten Potenz

in III) die Facta aus den correspondirenden Terminen in I. und II.

in IV) die Coefficienten des 2ten und der folgenden Terminen der 4ten Potenz.

in V) die 4te Potenz selbst von $a + b$.

166. Aufgabe. Eine Generalformel für jede Potenz mit einem ganzen positiven Exponenten m des Binomiums $a + b$ zu construiren.

Auflösung. Nach dem Zusatze (165) ist:

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m.m-1}{1.2} a^{m-2} b^2$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} a^{m-3} b^3 \text{ &c.}$$

Da nun $a^{m-1} = \frac{a^m}{a}$, und $a^{m-2} = \frac{a^m}{a^2}$ &c.; so ist auch $(a+b)^m =$

$$a^m + \frac{m}{1} \frac{a^m b}{a} + \frac{m.m-1}{1.2} \frac{a^m b^2}{a^2} \text{ &c.} = a^m + \frac{m}{1}$$

$$a^m . \frac{b}{a} + \frac{m.m-1}{1.2} a^m . \frac{b^2}{a^2} \text{ &c.}$$

In allen Terminen dieser Formel kömmt a^m vor, so wie auch in allen, den ersten ausgenommen, eine bestimmte Potenz von $\frac{b}{a}$. Setzt man also $a = P$, und $\frac{b}{a}$

$= Q$, mithin $b = aQ = PQ$ und $\frac{b^2}{a^2} = Q^2$ ꝛc.:

so ist $(a+b)^m = (P+PQ.)^m = P^m + \frac{m}{1} P^m Q + \frac{m.\ m-1}{1.\ 2} P^m Q^2 + \frac{m.\ m-1.\ m-2}{1.\ 2.\ 3.} P^m\ Q^3$ ꝛc.

Hier erhellet nun, daß jeder folgende Terminus ein Factum sey aus dem nächstvorhergehenden in den Terminus Q, dessen erster Coefficient $= \frac{m}{1}$, der 2te $= \frac{m-1}{2}$, der 3te $= \frac{m-2}{3}$ ꝛc.; setzt man also den ersten Terminus $= A$, den 2ten $= B$, den 3ten $= C$ ꝛc.: so ist $(a+b)^m = (P+PQ)^m = P^m + \frac{m}{1} AQ + \frac{m-1}{2} BQ + \frac{m-2}{3} CQ + \frac{m-3}{4} DQ + \frac{m-4}{5} EQ$ ꝛc., wo das Gesetz von selbst erhellt, nach welchem diese Formel für eine jede Potenz mit einem ganzen und positiven Exponenten fortgeführt werden könne, bis nämlich die Anzahl aller Terminen um 1 größer ist, als der Exponens der verlangten Potenz. (165)

Anmerkung.

Einen ganz scharfen Beweis der Binominalformel hat H. Käftner gegeben, (Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen, 2te Aufl. S. 52) den man auch in der sechsten meiner sechs mathem. Dissertationen entwickelt findet.

167. Zusatz. Die Anwendung dieser Formel zeigt sich leicht. Z. B. Es sey 7 zur 6ten Potenz zu erheben, so ist $7^6 = (1+6)^6 = (a+b)^6$,

also $a = P = 1$, und $\frac{b}{a} = Q = \frac{6}{1} = 6$,

und $m = 6$, mithin

$$P^m = 1^6 = 1 = A$$

$$\frac{m}{1}AQ = 6.1.6 = 36 = B$$

$$\frac{m-1}{2}BQ = 540 = C$$

$$\frac{m-2}{3}CQ = 4320 = D$$

$$\frac{m-3}{4}DQ = 19440 = E$$

$$\frac{m-4}{5}EQ = 46656 = F$$

$$\frac{m-5}{6}FQ = 46656 = G$$

Also $7^6 = A+B+C+D+E+F+G = 117649$. Eben so, wenn $a+b-c$ zur 3ten Potenz zu erheben wäre: würde $a = P$, $\frac{b-c}{a} = Q$, $m = 3$ seyn, mithin

P^m

$$P^m = a^3 = A$$
$$\frac{m}{1} AQ = 3a^2(b-c) = B$$
$$\frac{m-1}{2} BQ = 3a(b-c)^2 = C$$
$$\frac{m-2}{3} CQ = (b-c)^3 = D$$

mithin

$$(a+b-c)^3 = a^3 + 3a^2(b-c) + 3a(b-c)^2 + (b-c)^3.$$

168. Lehrsatz. Das Quadrat der binomischen Wurzel $a+b$ besteht 1) aus dem Quadrate des ersten Radical-Terminus a, 2) aus dem Producte des 2ten Terminus b in das zweyfache des ersten a, 3) aus dem Quadrate des 2ten Terminus b.

Beweis. Es ist $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + (2a \times b) + b^2$.

169. Zusatz. Setzt man $m+n = A$ und $s = B$: so ist $(m+n+s)^2 = (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 = (m+n)^2 + 2(m+n)s + s^2$. Mithin besteht das Quadrat einer dreynamigen Wurzel 1) aus dem Quadrate der beyden ersten Radicalterminen, 2) aus dem doppelten Producte des dritten in die beyden vorhergehenden, 3) aus dem Quadrate des dritten Radicalterminus. Eben so ist, wenn man $a+b+c = A$, und $d = B$ setzt,

(a

$(a+b+c+d)^2 = (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 = (a+b+c)^2 + 2(a+b+c)d + d^2$ ꝛc. Allgemein gilt der

170. Lehrsatz. Das Quadrat einer jeden vieltheiligen Wurzel besteht aus dem Quadrate eines jeden einzelnen Radicalterminus, und aus dem doppelten Producte eines jeden folgenden Radicalterminus in alle vorhergehende.

Beweis. Jeder Terminus der vieltheiligen Wurzel, der auf den ersten folgt, kann als zweyter $= B$ gelten, da man alle vorhergehende zusammen genommen als den ersten A setzen kann. (169) Nun giebt B im Quadrate von $A+B$ allzeit $2AB + B^2$; statt dessen der erste Terminus der Wurzel im Quadrate nur sein eigenes Quadrat giebt: also ist der Lehrsatz wahr.

171. Zusatz. Auch das Quadrat einer jeden vieltheiligen Zifferwurzel besteht aus den nämlichen Stücken, die im Lehrsatze (170) angegeben sind. Z. B. $(325)^2 = (300+20+5)^2 = (300)^2 + 2(300)20 + (20)^2 + 2(300+20)5 + (5)^2$.

172. Zusatz. Daher kann man das Quadrat einer Zifferzahl unmittelbar aus den Ziffern selbst entwickeln, wenn man vorerst das Quadrat der ersten Ziffer zur linken Hand macht, dann das doppelte Product der 2ten in die erste; dann das Quadrat der 2ten; dann das doppelte Product der 3ten in die beyden vorausgehenden, und das Quadrat

drat der 3ten u. s. w., und diese Producte so untereinander schreibt, daß immer die letzte Ziffer des Folgenden eine Stelle weiter hinaus gegen die rechte Hand zukomme, als die letzte Ziffer des vorhergehenden, und nun dieselben addiret, wie beyliegendes Schema zeigt;

$(325)^2$	$= 9$	$=$	90000
	12	$=$	12000
	4	$=$	400
	320	$=$	3200
	25	$=$	25
	105625		

aus welchem zugleich der Grund der vorgeschriebenen Regel erhellet.

173. Lehrsatz. Der Cubus einer jeden polynomischen Wurzel besteht 1) aus dem Cubus eines jeden einzelnen Radicalterminus, 2) aus dem dreyfachen Producte des Quadrats aller vorhergehenden Terminen in jeden folgenden Radicalterminus, 3) aus dem dreyfachen Producte aus dem Quadrate eines jeden folgenden Radicalterminus in alle vorausgehende.

Beweis. Ein einziger Radicalterminus a giebt im Cubus nur den Cubus seiner selbst $= a^3$. Setzt man einen 2ten b dazu: so giebt dieser im

Cubus

Cubus drey Stücke 1) $3a^2b$, 2) $3ab^2$, 3) b^3 (163). Da nun jeder Terminus einer vieltheiligen Wurzel $m + n + q + p$ ꝛc. der nach dem ersten m folgt, als der 2te $=$ B gilt, wenn man alle vorausgehende als den ersten $=$ A setzt: so muß auch jeder folgende $=$ B im Cubus diese nämlichen drey Stücke geben, die b giebt, nämlich 1) $3A^2B$, 2) $3AB^2$, 3) B^3, also ist der Lehrsatz wahr.

174. Zusatz 1. Also besteht auch der Cubus einer jeden vieltheiligen Zifferwurzel aus den nämlichen Stücken, die im Lehrsatze (173) genannt sind. Z. B. $(23)^3 = (20+3)^3 = (20)^3 + 3[(20)^2]3 + 3(20)3^2 + 3^3 =$

8000	=	8...
3600	=	36..
540	=	54.
27	=	27
12167	=	12167

wo wieder die Methode erhellet, den Cubus einer gegebenen Zifferzahl unmittelbar aus den Ziffern selbst zu entwickeln.

175. Zusatz 2. Auf gleiche Weise läßt sichs zeigen, daß jeder nach dem allerersten folgende Terminus einer polynomischen Wurzel in der 4ten Potenz 4, in der 5ten 5, — überhaupt in jeder Potenz so viele Stücke gebe, als der Exponens der Potenz Einheiten hat. Kommen nun in einer gegebenen Potenz alle, und nur diejenigen Theile vor, welche in ihr nach ihrer zeither erklärten Genesis vor-

vorkommen können und müssen: so heißt sie eine vollkommene, im Gegentheile eine unvollkommene Potenz. Z. B. 7 ist ein unvollkommenes Quadrat entweder von 2 oder von 3; $a^2 + 2ab$ ein unvollkommenes Quadrat von $a + b$.

176. Zusatz 3. Aus der in den Zusätzen (172, 174) vorkommenden Methode, das Quadrat und den Cubus unmittelbar aus den Ziffern einer gegebenen Zahl zu entwickeln, erhellet sofort, daß, wenn man nach denjenigen Stücken, welche eine jede Ziffer der Wurzel im Quadrate und im Cubus gibt, einen Strich zieht, der die untergesetzte Potenz selbst durchschneidet, das Quadrat und der Cubus in Classen getheilt werde, wovon eine jede von der Rechten zur Linken soviele Ziffern enthält, als der Exponent der Potenz anzeigt, ausgenommen die letzte Classe gegen die linke Hand, welche auch aus wenigeren Ziffern bestehen kann.

Z. B. $(325)^2 =$

9		
1	2	
	4	
	32	0
		25
10	56	25

; eben so ist $(23)^3 =$

8		
3	6	
	54	
		27
12	167	

und $(214)^2 =$

4		
4		
	1	
	16	8
		16
4	57	96

Der

Der Grund hievon liegt darinn, weil die allererste Radicalziffer zur linken Hand in jeder Potenz nur einen einzigen Terminus gibt, die Potenz nämlich von sich selbst; jede folgende aber in der Potenz so viele Stücke gibt, als Einheiten im Exponenten der Potenz sind (174). Wenn also nach denjenigen Stücken, welche eine jede Radicalziffer in der Potenz gibt, Striche gezogen werden, die die Potenz selbst durchschneiden; so muß nothwendig eine jede Classe der Potenz von der Rechten zur Linken aus so vielen Ziffern bestehen, als der Exponent der Potenz Einheiten hat, ausgenommen die erste Classe zur linken Hand, als welche auch aus weniger'n Ziffern bestehen kann. Denn diese erste Classe enthält die Potenz der ersten Radicalziffer, welche Ziffer entweder gröſser oder kleiner, als 3, oder $= 3$ ist. Ist sie > 3, so besteht die erste Classe zur linken Hand im Quadrate oder Cubus derselben zum wenigsten schon aus 2 Ziffern: denn $4^2 = 16$, und $4^3 = 64$. Ist sie aber < 3, oder $= 3$; dann bestehet die erste Classe des Quadrats entweder aus einer oder aus 2 Ziffern, je nachdem das Quadrat der ersten Radicalziffer durch die Addition jener

Ziffern, die von den Theilen, welche die folgenden Radicalziffern im Quadrate geben, unter dasselbe zu stehen kommen, entweder größer wird als 9, oder nicht. Ein gleiches gilt von der ersten Classe gegen die linke Hand im Cubus, so wie dieser ganze Zusatz sich auf eine jede höhere Zifferpotenz leicht anwenden läßt.

177. Zusatz 4. Wenn demnach eine gegebene Zifferpotenz so in Classen eingetheilt wird, daß jede Classe von der Rechten gegen die Linke so viele Ziffern erhält, als Einheiten im Exponenten der Potenz sind, ausgenommen die erste Classe zur Linken, als welche auch nur aus Einer Ziffer bestehen kann: so entspricht einer jeden Classe Eine Radicalziffer; so daß man nun aus der Anzahl der Classen sofort die Anzahl der Ziffern in der Wurzel, wie auch den Localwerth derselben bestimmen kann. Ferner ist dann in der ersten Classe zur linken Hand die Potenz der ersten Radicalziffer, in den 2 ersten Classen die Potenz der beyden ersten Radicalziffern, u. s. w. enthalten. Wie aber dieser ganzen Lehre von der Entstehungsart der Potenzen gemäß die Wurzel selbst aus gegebenen Potenzen gezogen, d. i. diejenige Größe gefunden werden könne, aus deren Multiplica-

tion

tion mit sich selbst die gegebene Potenz entstanden ist, zeigt der

Zweyte Artikel.

Von der Ausziehung der Wurzeln.

A)

Aus Potenzen, als ganzen Größen im Gegensatze der gemeinen Brüche.

a)

Aus Potenzen, als ganzen Zifferzahlen.

178. Aufg. **Aus einem vollkommenen Zifferquadrate die Wurzel auszuziehen.**

Auflösung. Theilet das gegebene Quadrat in Classen nach der Anleitung (177). Findet nur Eine Classe statt: so ist auch die Wurzel nur einziffrig (177) und zur Erkenntniß derselben dient folgende Tafel der Potenzen aller einziffrigen Wurzeln, welche Tafel sich leicht bis zu einer jeden bestimmten höheren Potenz fortsetzen läßt.

x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128
3	9	27	81	243	729	2187
4	16	64	256	1024	4096	16384
5	25	125	625	3125	15625	78125
6	36	216	1296	7776	46656	279936
7	49	343	2401	16807	117649	823543
8	64	512	4096	32768	262144	2097152
9	81	729	6561	59049	531441	4782969

Suchet nämlich die gegebene Potenz in Einer der Spalten, an deren Spitze oben die Potenz von x im nämlichen Grade steht, welchen die gegebene Potenz hat. Z. B. als 4te Potenz sey gegeben 4096. Sucher diese Zahl in der Spalte x^4; die ihr in der ersten Spalte correspondirende einziffrige Wurzel ist 8. Findet ihr aber die gegebene Potenz von Einer Classe nicht in der zugehörigen Spalte dieser, wenn es nöthig ist, weiter fortzusetzenden Tafel, so ist dieß ein Zeichen, daß die gegebene Potenz unvollkommen sey, von der keine genaue Wurzel möglich ist, wie unten wird gezeigt werden.

Hat aber das Quadrat mehrere Classen, z. B. das Quadrat 144; so verfahrt nach folgenden Regeln.

Qua-

Quadrat	Wurzel	M
1 / 44	a + b	(2a + b) b
1	1 2	(2 2) 2 = (20 + 2)2
4 / 4		4 4 = 2ab + b²
44		
0		

I. Regel. Da das gegebene Quadrat nur 2 Classen hat; so kann die Wurzel auch nur 2 Ziffern haben, die a + b heißen können, deren die erste a Zehner, die andere b aber einfache Einheiten bedeutet (177). In der ersten Classe des Quadrats gegen die linke Hand, nämlich in 1 steckt das Quadrat der ersten Radicalziffer (177). Suchet also in obiger Potenzen- und Wurzeltafel in der Spalte x^2 das Quadrat 1 die Wurzel desselben = 1, ist die erste zu findende Radicalziffer = a, und mithin unter a zu setzen. Wäre das Quadrat, welches in der ersten Classe steckt, nicht genau in der Spalte x^2 vorfindlich; welches dann der Fall ist, wenn diese erste Classe nicht das reine Quadrat der ersten Radicalnote enthält, sondern noch etwas darüber von jenen Theilen, welche die folgenden Radicalnoten im Quadrate geben: so müßte in der

Potenzentafel das zunächst kleinere Quadrat gesucht, und die ihm correspondirende Radicalziffer unter a gesetzt werden. Diese erste Radicalziffer $a = 1 = 10$ erhebt nun wieder zum Quadrate $a^2 = 1$, und subtrahirt es von der ersten Classe, wo in unserem Falle der Rest $= 0$ ist. Bleibt aber ein Rest, welches der Fall ist, wenn die erste Classe nicht einzig das Quadrat der ersten Radicalnote enthält, so muß zu ihm die 2te Classe des gegebenen Quadrats eben so herab gesetzt werden, wie wenn kein Rest bleibt.

II. Regel. Da vom gegebenen Quadrate das Quadrat der ersten Radicalnote abgezogen ist, so muß in der 2ten Classe (sammt dem Reste, wenn einer geblieben ist) 44 noch dasjenige enthalten seyn, was die 2te Radicalnote b im Quadrate giebt, nämlich $2ab + b^2$, und zwar in der letzten, durch ein Strichlein abzusondernden Ziffer dieser 2ten Classe gegen die rechte Hand zu muß b^2, und in den übrigen gegen die linke Hand zu $2ab$ stecken. Denn b bedeutet in unserem Beyspiele einfache Einheiten; a aber Zehner, also ab das Product der Zehner in die einfachen Einheiten, welches Product Zehner giebt, und b^2 ist das Quadrat der

ein-

einfachen Einheiten, welches sonach, da $1^2 = 1$ ist, in derjenigen Ziffer der 2ten Classe stecken muß, welche einfache Einheiten bedeutet, d. i. in 4 als der letzten Ziffer der 2ten Classe gegen die rechte Hand zu. Dagegen muß 2ab in den übrigen Ziffern der 2ten Classe gegen die linke Hand zu stecken, als welche Zehner bedeuten, so wie auch 2ab Zehner bedeutet. Um nun die 2te Radicalziffer $= b$ zu bekommen, dividiret 2ab, oder die Zifferzahl, in welcher 2ab steckt, in unserem Falle die Zahl 4 durch 2a, d. i. durch das doppelte der ersten schon gefundenen Radicalziffer, d. i. in unserem Falle durch 2; und den Quotus $= b = 2$ (welcher Quotus niemahls größer als 9 seyn kann, indem von den Ziffern einer Zifferwurzel keine, einzeln genommen, größer als 9 ist) schreibt als 2te Radicalziffer (56) unter b, jedoch mit Weglassung des $+$, welches zwischen a und b steht. Denn es ist $12 = 10 + 2 = a + b$, da $1 + 2 = 3$ seyn würde. Um nun zu sehen, ob diese 2te Radicalziffer $b = 2$ nicht zu groß sey (daß sie nicht zu klein sey, ist dann schon gewiß, wenn man in der Divisi-on des 2ab durch 2a den größtmöglichen Quotus genommen hat) so machet jene

Theile, welche jede 2te Radicalnote b im Quadrate gibt, nämlich $2ab + b^2 = (2a + b)\,b = (20 + 2)\,2 = 22 \times 2 = 44$ wie im obigen Schema bey M ersichtlich ist; und subtrahiret dieses $2ab + b^2 = 44$ von der 2ten Classe des gegebenen Quadrates (sammt dem vor ihr stehenden Reste, wenn etwa Einer geblieben ist); da nun der Rest $= 0$; und keine Classe mehr im gegebenen Quadrate vorhanden ist: so ist die gesuchte Wurzel $= 12$. Könnte man aber $2ab + b^2 = 44$ nicht abziehen von der Zahl, worinn $2ab + b^2$ enthalten ist, so wäre die 2te Radicalziffer $b = 2$ zu groß, und müßte mithin so lange vermindert werden, bis $2ab + b^2$ von der Zahl, worinn $2ab + b^2$ enthalten ist, abgezogen werden kann.

III. Regel. Hat das Quadrat 3 (oder mehrere) Classen, wie im Exempel des beygesetzten Schema's;

Quadrat	Wurzel	M
80.64.04	a + b + c	(2a + b)b
64	8 9 8	16 9 × 9
16 64		1521 = 2ab + b²
15 21		(2A + B) B
1430 4		178 8 × 8
1430 4		14304 = 2AB + B²
0		

so suchet vorerst nach den beyden vorausgehenden Regeln aus den beyden ersten Classen des Quadrates die zwey ersten Radicalziffern 89 = 800 + 90 = 890 Einheiten = 89 Zehnern. Zu dem Reste 143, welcher bleibt, wenn das Quadrat von 89 Zehnern = 7921 von den beyden ersten Classen 80.64 des gegebenen Quadrats abgezogen wird, setzt die 3te Classe 04 herab, und schneidet wieder die letzte Ziffer 4 von den übrigen 1430 durch ein Strichlein ab. Die beyden gefundenen Radicalziffern $a + b = 89$ Zehnern setzet $= A$, und die noch zu findende dritte $c = B$. Da nun vom ganzen Quadrate abgezogen ist $A^2 = (890)^2$: so muß im Reste 1430,4 noch $2AB + B^2$ enthalten seyn, und zwar B^2 in der letzten Ziffer 4, und 2AB in 1430. Den 2AB ist ein Product aus den Zehnern A in die einfachen Einheiten B, muß mithin in den Zehnern der Zahl 14304, welche nach der letzten Ziffer 4 bey 0 anfangen, oder in 1430 vorkommen, enthalten seyn. B^2 aber als das Quadrat der einfachen Einheiten muß in der abgeschnittenen Ziffer 4 stecken, als welche die einfachen Einheiten bedeutet. Dividiret also wieder 2AB durch 2A, d. i. 1430 durch 178; der Quotus $B = 8$ ist die

3te Radicalziffer = c. Macht nun wieder, um zu sehen, ob B = 8 nicht zu groß sey, die Stücke, die B im Quadrate gibt, nämlich $2AB + B^2$ = (2A + B) B = (1780 + 8) 8 = 1788 × 8 = 14304, wie in M ersichtlich ist. Da diese Zahl von der Zahl 14304 abgezogen, keinen Rest läßt; und auch keine Classe mehr im Quadrate übrig ist: so ist die 3te, so wie die 2 ersten Radicalziffern, mithin die ganze Wurzel richtig gefunden. Wären noch mehrere Classen im Quadrate übrig: so würden die noch zu findenden übrigen Radicalziffern auf gleiche Weise gefunden; wenn man nämlich alle schon gefundene = A, und die noch zu findende immer = B setzte.

IV. Regel. Ist jene Zahl, welche 2 A B d. i. das doppelte Product der zu findenden Radicalziffer in die vorausgehenden schon gefundenen enthält, kleiner, als daß 2 A ganz in ihm enthalten wäre: so setzt als folgende Radicalziffer eine o an, werft dann zu jener Zahl, worinn $2AB + B^2$ enthalten war, die nächste Classe des Quadrats herab, und verfahret weiters nach den vorigen Regeln.

V.

V. Regel. Sind eine oder mehrere Radicalziffern gefunden, und im Quadrate nur noch Classen von lauter Nullen vorräthig: so setzt für jede Classe von Nullen in der Wurzel eine Nulle an. Denn jede einer bedeutenden Radicalziffer beygefügte Nulle gibt in jeder Potenz eine Classe von so vielen Nullen, als der Exponens der Potenz Einheiten hat. Z. B. $(500)^2 =$ 25.00.00; also ist auch $\sqrt{}25.00.00 = 500$.

Generalbeweis. Die nach den gegebenen Regeln gefundene Wurzel zum Quadrate erhoben gibt das gegebene vollkommene Quadrat wieder: also ist sie die wahre Wurzel.

179. Aufgabe. Aus einem vollkommenen Ziffercubus die Wurzel auszuziehen.

Auflösung. Theilet den Cubus z. B. 724150792 in Classen (177), wie im beyliegenden Schema ersichtlich ist, und verfahret dann mit Hinsicht auf dieses Schema nach folgenden Regeln.

Cubus.	Wurzel. a + b + c	
724,150,792	8 9 8	M 3 a² = 192
512		3a²b = 1728
D. 212150		3ab² = 1944
192969		b³ = 729
E. 19181792		Summa = 192969
19181792		
0		N 3 A² = 23763
		3A²B = 190104
		3AB² = 17088
		B³ = 512
		Summa = 19181792

I. Regel. In der ersten Classe zur linken Hand 724 ist der Cubus der ersten Radicalnote a enthalten, welches a Hunderte bedeutet (177). Suchet also in der Spalte x^3 der obigen Potenzentafel (178) den Cubus 724, oder den nächst kleineren 512, welchem in der Spalte x die Wurzel 8 entspricht. Die erste Radicalziffer a ist also = 8. Subtrahiret nun den Cubus derselben = 512 von 724: und zum Reste 212 setzet die nächste Classe 150 herab, wie in D ersichtlich ist.

II. Regel. In der Zahl D = 212150 steckt $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (177), und zwar $3a^2b$ in 2121, $3ab^2$ in 5, und b^3 in 0; denn a bedeutet Hunderte, b Zehner, also muß $3a^2b$,

als ein Product der 10000er in Zehner, enthalten seyn in den 1000000ern, welche in der Zahl 2121 stecken. — Gleichmäßig zeigt sichs, daß $3ab^2$ in 5, und b^3 in 0 enthalten sey. Dividiret also $3a^2b$ durch $3a^2$, d. i. 2121 durch 192: so erhaltet ihr die 2te Radicalnote $b = 9$. Machet nun diejenigen Theile, welche b im Cubus gibt, nämlich $3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 3\ [(800)^2]\ 90 + 3(800).\ [(90)^2] + (90)^3 = 1728\,0000 + 19440000 + 729000 = 192969000 = 192969$ tausende, (welche Summe auch herauskömmt, wenn man a und b nicht in ihren wahren Werth auflöst, sondern geradezu $3a^2b = 1728$, $3ab^2 = 1944$, $b^3 = 729$ setzt, und diese Producte so unter einander schreibt, wie in M des Schema's ersichtlich ist.) Ziehet nun $3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 192969$ ab von der Zahl $D = 212150$, und zu dem Reste 19181 setzet die nächste Classe 792 herab, wie in E zu ersehen ist.

III. Regel. Setzet die zwey gefundenen Radicalnoten $a + b = 89 = 890 = A$, und die 3te noch zu findende $c = B$. Da nun vom ganzen gegebenen Cubus das A^3 abgezogen ist: so muß der Rest desselben 19181792 noch das $3A^2B + 3AB^2$

$3AB^2 + B^3$ enthalten, und zwar 191817 das $3A^2B$, wie sich nach dem Vorhergehenden leicht einsehen läßt. Dividiret also $3A^2B$ durch $3A^2$ d. i. die Zahl 191817 durch 23763, und der Quotus $B = 8$ ist die gesuchte 3te Radicalnote $=$ c. Machet und setzet nun wieder nach der in N des beyliegenden Schema's ersichtlichen Methode die Producte $3A^2B$, $3AB^2$, B^3 unter einander, und ziehet die Summe derselben 191817**2** von der Zahl in E ab. Da nichts übrig bleibt, und auch keine Classe mehr im Cubus vorhanden ist: so ist die gesuchte Wurzel 898 gefunden. Auf gleiche Weise würden noch mehrere Radicalnoten gefunden, wenn mehrere Classen vorräthig wären; man setze namlich alle schon gefundene Radicalnoten $= A$, und die nächste noch zu findende immer $= B$, und verfahre im übrigen nach den zeither vorgetragenen Regeln, wozu auch die IVte und Vte Regel (178) in Hinsicht auf den Cubus genommen, gehören.

Beweis. Die so gefundene Cubikwurzel ist nicht zu groß, und nicht zu klein. Denn dort könnte der Cubus derselben vom gegebenen Cubus nicht abgezogen werden; und hier müßte

zuletzt

zuletzt ein Rest bleiben; also wird nach den gegebenen Regeln die Wurzel richtig gefunden.

180. Zusatz. Aus höheren vollkommenen Potenzen wird die Wurzel nach gleichem Gange ausgezogen. Nur muß man diesen zeither erklärten Gang der Genesis dieser höheren Potenzen anpassen.

181. Lehrsatz. Einer jeden Zifferpotenz können, ihrem Werthe unbeschadet, noch so viele Classen von Decimalnullen beygesetzt werden.

Beweis. Einer jeden Zifferwurzel können, ihrem Werthe unbeschadet, noch so viele Decimalnullen beygesetzt werden (141). Jede der Wurzel beygesetzte Decimalnulle gibt aber zufolge der Multiplication der Decimalbrüche in jeder Potenz eine Classe von so vielen Decimalnullen, als der Exponent der Potenz Einheiten hat; der Werth der Potenz kann also durch hinzugefügte Classen von Decimalnullen eben so wenig verändert werden, als der Werth der Wurzel durch hinzugefügte Decimalnullen. So ist z. B. $2 = 2.0 = 2.00 = 2.000$ &c. und nun

$2^2 = (2,0)^2 = 4,00 = (2,00)^2 = 4.00.00$

$= (2.$

$= (2.000)^2 = 4.00.00.00.$, eben so ist 2^3 $= 8 = 8.00 = 8.000.000$ ꝛc.

182. Zusatz. Die Classen der Decimalnullen sind nach der Genesis der Potenzen aus Wurzeln, denen Decimalnullen anhängen, allzeit vollständig, d. i. jede Classe enthält so viele Decimalnullen, als der Exponens der Potenz anzeigt. Wird also eine Potenz, welcher Decimalnoten anhängen, gegeben, in der die Classen der Decimalnoten nicht vollständig sind: so müssen sie vor allem durch Hinzusetzung der nöthigen Decimalnullen vollständig gemacht werden, z. B. aus dem Quadrate 36,2 machet 36,20, aus dem Quadrate 2,462 machet 2,46.20, aus dem Cubus 22,3 machet 22,300 = 22,300,000.

183. Lehrsatz. Von einer unvollkommenen Potenz, als einer ganzen Zahl, ist keine genaue Wurzel möglich.

Beweis. Die Wurzel einer solchen Potenz kann I) keine ganze Zahl seyn. Denn jede ganze Zahl, gehörig zu einer bestimmten Potenz erhoben, gibt allzeit eine vollkommene Potenz. II. Kein eigentlicher Bruch: denn das Factum aus einer Größe in einen eigentlichen Bruch ist allzeit kleiner als der

Mul-

Multiplicand (134). Da also in unserem Falle, wenn ein eigentlicher Bruch die Wurzel wäre, schon der Multiplicand als eigentlicher Bruch kleiner als die Einheit ist, so müßte noch vielmehr jede Potenz desselben kleiner als die Einheit seyn, da doch nach der Voraussetzung die unvollkommene Potenz eine ganze Zahl ist.

III. Auch keine gemischte Zahl. Denn keine Potenz einer gemischten Zahl giebt eine ganze Zahl. Denn damit eine Potenz der gemischten Zahl $a + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$ eine ganze Zahl geben könnte; müßte der Denominator c zu dieser Potenz erhoben, den zu eben dieser Potenz erhobenen Numerator $ac + b$ messen; mithin müßten die Factoren von der Potenz des Nenners c genau in den Factoren derselben Potenz des Zählers $ac + b$ enthalten seyn (94) also auch c in $ac + b$, was doch der Voraussetzung widerspricht.

184. Zusatz. Unvollkommene Potenzen, als ganze Zahlen, und ihre Wurzeln haben sonach kein gemeinschaftliches Maß, da weder die Einheit, noch ein aliquoter Theil derselben beyde mißt. Da nun Zahlen, welche weder von der Einheit, noch von einem aliquoten Theile der

Einheit gemessen werden, Irrational zahlen heißen: so sind die Wurzeln von unvollkommenen Potenzen, die ganze Zahlen sind, allzeit Irrationalzahlen.

185. Lehrsatz. Obgleich von einer unvollkommenen Potenz keine genaue Wurzel möglich ist: so kann doch eine Wurzel gefunden werden, welche der wahren so nahe kömmt, daß der Unterschied zwischen beyden kleiner ist, als jeder Angebliche.

Beweis. Dieser erhellet sofort aus obigem Lehrsatze (181), z. B. $\sqrt{22} = \sqrt{[22.00.00.00.00.\text{ &c.}]} = 4{,}6904158..$ eben so $\sqrt{156} = 12{,}48995...$ und $\sqrt[3]{10} = 2{,}1544347$ &c.

b)

Aus Potenzen als ganzen Buchstabengrößen.

186. Aufgabe. Aus einer monomischen Literalpotenz die Wurzel zu ziehen.

Auflösung. Dividiret den Exponens eines jeden Factors der gegebenen monomischen Potenz durch den Exponenten der verlangten Wur-

Wurzel. Z. B. $\sqrt{a^2} = a^{\frac{2}{2}} = a$, $\sqrt[3]{a^3} = a^{\frac{3}{3}} = a$,

$\sqrt[3]{2ab} = 2^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}$, allgemein $\sqrt[n]{a^m b^r} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{r}{n}}$

Beweis. Es ist allgemein $(a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{r}{n}})^n =$ $a^m b^r$, (158), mithin auch $a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{r}{n}} = \sqrt[n]{a^m b^r}$.

187. Aufg. Aus einer vollkommenen polynomischen Literalpotenz die Wurzel auszuziehen.

Auflös. I. Regel. Ordnet die gegebene Potenz, z. B. das Quadrat $16ab^2x + 4a^2x^2 + 16b^2x^2 + 8ax^3 + 4x^4 + 16b^4$ nach dem Exponenten eines gewissen Buchstabens, z. B. x, so daß dieser Buchstabe mit dem größten Exponenten den Anfang mache, und nun im vorgelegten Beyspiele die Stellung der Terminen folgende werde: $4x^4 + 8ax^3 + 4a^2x^2 + 16b^2x^2 + 16ab^2x + 16b^4$.

II. Regel. Da mehr als 3 Terminen in dem gegebenen Quadrate sind: so muß auch die Wurzel mehr als 2 Terminen haben (168), und zwar muß in dem ersten Terminus des Quadrates das Quadrat des ersten Radicalterminus

stecken. Ziehet also aus $4x^4$ die Quadratwurzel nach der Regel (186). Diese ist $\pm 2x^2$ (160). Das Quadrat derselben $= 4x^4$ abgezogen von $4x^4$ läßt nichts übrig.

III. Regel. Da auf das Quadrat der ersten Radicalnote das doppelte Product der zweyten in die erste folgt: so dividiret, um die zweyte Radicalnote zu erhalten, $8ax^3$ durch $\pm 4x^2$, und setzet den Quotus $\pm 2ax$ als zweyte Radicalnote an. Machet dann diejenigen Stücke, welche die zweyte Radicalnote im Quadrate gibt, nämlich $(\pm 4x^2 \pm 2ax).(\pm 2ax) = 8ax^3 + 4a^2x^2$, und ziehet dieselben ab von den noch übrigen Theilen des gegebenen Quadrates, wo dann $16b^2x^2 + 16ab^2x + 16b^4$ vom Ganzen übrig bleibt.

IV. Regel. Setzet die beyden gefundenen Radicalnoten $\pm 2x^2 \pm 2ax = A$ (169), und die dritte noch zu findende $= B$; dann ist $2AB$ in $16b^2x^2 + 16ab^2x$ enthalten, und mithin $\frac{2AB}{2A} = \frac{16b^2x^2 + 16ab^2x}{\pm 4x^2 \pm 4ax} = B = \pm 4b^2$. Machet nun wieder die Stücke, die B im Quadrate gibt, nämlich $(2A+B)B = (\pm 4x^2 \pm 4ax \pm 4b^2).(\pm 4b^2) = 16b^2x^2 + 16ab^2x + 16b^4$.

Da nun diese von den noch übrigen Theilen des Quadrates abgezogen nichts mehr übrig lassen: so ist die Wurzel $= \pm x^2 \pm ax \pm \frac{1}{4}b^2$ genau gefunden.

188. Zusatz. Auf ähnliche Weise wird aus höheren vollkommenen Potenzen ganzer polynomischen Literalgrößen die Wurzel gezogen, wenn man nur die für das Ausziehen der Wurzel aus dem Quadrate derselben nur so erklärte Methode (187) der Genesis höherer Potenzen besagter Art (173. 175) anpasset.

189. Aufgabe. Aus unvollkommenen polynomischen Potenzen, als ganzen Literalgrößen, die Wurzel auszuziehen.

Auflösung. Erhebet die gegebene Potenz nach der obigen Generalformel (166) zu einer Potenz mit einem gebrochenen Exponens, dessen Zähler $= 1$, u. Nenner der Exponens der gesuchten Wurzel ist.

Denn es ist allgemein $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ (161), d. i. die n^{te} Wurzel aus einer Potenz x ausziehen, ist eben so viel, als diese Potenz x zu einer Potenz mit einem gebrochenen Exponens erheben, dessen Nenner $= n$ und Zähler $= 1$ ist. Also wird in obiger Gene-

ralformel m ein Bruch, dessen Zähler = 1, Renner aber entweder = 2 oder = 3 ꝛc. ist, und P ist das erste Quadrat oder der erste Cubus ꝛc. des Polynomiums, Q aber die übrige ganze Quantität des Polynomiums, dividiret durch das erste Quadrat oder den ersten Cubus ꝛc. desselben. Z. B. $\sqrt{(d^2+x^2)} = (d^2+x^2)^{\frac{1}{2}}$, also $P = d^2$, $m = \frac{1}{2}$, $Q = \frac{x^2}{d^2}$, mithin $P^m = d^{2\cdot\frac{1}{2}} = d = A$; folglich $\frac{m}{1} AQ = \frac{x^2}{2d} = B$. u. s. w. Eben so ist $\sqrt{2} = \sqrt{(1+1)} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{3}{48}$ ꝛc.

B.

Aus Potenzen als gemeinen Brüchen.

190. Aufgabe. Aus Potenzen als gemeinen Brüchen die Wurzel auszuziehen.

Auflösung. Ziehet nach den vorausgehenden Regeln die verlangte Wurzel sowohl aus dem Zähler als Renner des Bruches. Z. B. $\sqrt{\left(\frac{25}{144}\right)} = \frac{5}{12}$. allgemein $\sqrt[n]{\frac{a^m}{b^r}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{r}{n}}}$ und

$$\sqrt{\left(\frac{9x^2+24xy+16y^2}{x^2+2xy+y^2}\right)} = \frac{3x+4y}{x+y}$$

Beweis. Dieser liegt in der Genesis der Potenzen gemeiner Brüche (158).

Dritter Artikel.

Vom Calcul mit Wurzelgrößen.

191. Erklärung. Wurzelgrößen (quantitates radicales) sind Größen, denen ein Wurzelzeichen vorstehet. Z. B. $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[r]{a}$. gleichnamige Wurzelgrößen sind solche, deren Wurzelzeichen den nämlichen Exponenten hat, z. B. $\sqrt[n]{a^m}$ und $\sqrt[n]{b^r}$. Verschiedennamige sind jene, die nicht gleichnamig sind. Da die Größe unter dem Wurzelzeichen eine Potenz von beliebigem Exponenten, und sonach die Wurzelgröße eine Irrationalzahl (184) seyn kann: so wird der Calcul mit Wurzelgrößen auch der Calcul mit Irrationalgrößen genannt. So ist z. B., wenn $n = 3$, $a = 7$, $m = 1$, die Wurzelgröße $\sqrt[n]{a^m}$ eine Irrationalgröße.

192. Aufgabe. Verschiedennamige Wurzelgrößen in gleichnamige zu verwandeln.

Auflösung. Multipliciret den Exponens sowohl des Wurzelzeichens einer jeden der gegebenen Wurzelgrößen, als der unter ihm stehenden Größe, mit dem Producte aus den Exponenten der Wurzelzeichen aller übrigen Größen. Z. B. aus $\overset{m}{V}a^n$, und $\overset{c}{V}b^r$ machet $\overset{mc}{V}a^{cn}$ und $\overset{mc}{V}b^{mr}$. Eben so aus $\overset{m}{V}a^n$, $\overset{c}{V}b^r$, $\overset{s}{V}d^e$ machet $\overset{mcs}{V}a^{ncs}$, $\overset{cms}{V}b^{mrs}$, $\overset{cms}{V}d^{cem}$.

Beweis. Es ist $\overset{m}{V}a^n = a^{\frac{n}{m}}$ und $\overset{c}{V}b^r = b^{\frac{r}{c}}$ (161): reduciret man nun die gebrochenen Exponenten auf gleichnamige Brüche: so ist $a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{cn}{cm}}$, und $b^{\frac{r}{c}} = b^{\frac{mr}{mc}}$:

Da nun $a^{\frac{cn}{cm}} = \overset{cm}{V}a^{cn}$, und $b^{\frac{mr}{mc}} = \overset{mc}{V}b^{mr}$: so ist auch $\overset{m}{V}a^n = \overset{cm}{V}a^{cn}$, und $\overset{c}{V}b^r = \overset{mc}{V}b^{mr}$. Z. B. V_3, und $\overset{3}{V}_5 = 3^{\frac{1}{2}}$ und $5^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{3}{6}}$ und $5^{\frac{2}{6}} = \overset{6}{V}_{3^3}$ und $\overset{6}{V}_{5^2} = \overset{6}{V}_{27}$ und $\overset{6}{V}_{25}$.

193. Aufgabe. Eine Größe vor dem Wurzelzeichen unter das Wurzelzeichen zu bringen, ohne den Werth der ganzen gegebenen Größe zu ändern.

Auf-

Auflösung. Es sey $a \overset{m}{V} b = ab^{\frac{1}{m}}$ (161) $= q$. Beydes zur Potenz m erhoben gibt $a^m b = q^m$ (158); mithin ist auch, wenn man beyderseits die mte Wurzel ausziehet, $\overset{m}{V} a^m b = \overset{m}{V} q^m = q$ (186). Da nun auch nach der Annahme $a \overset{m}{V} b = q$: so ist $a \overset{m}{V} b = \overset{m}{V} a^m b$; d. i. Um eine Größe a vor dem Wurzelzeichen unter das Wurzelzeichen zu bringen, ohne den Werth der ganzen gegebenen Größe zu ändern: so erhebet die Größe a zur Potenz, welche der Exponens des Wurzelzeichens anzeigt, und multipliciret damit die unter dem Wurzelzeichen stehende Größe. Z. B $a \overset{4}{V} b = \overset{4}{V} a^4 b$; $6 \overset{4}{V} 2 = \overset{4}{V} 1296 . 2 = \overset{4}{V} 2592$.

194. Zusatz. Da $a \overset{m}{V} b = \overset{m}{V} a^m b$ (193): so erhellet, daß, wenn unter den Factoren der Größe unter dem Wurzelzeichen einer, oder mehrere vorkommen, welche mit dem Wurzelzeichen gleiche Exponenten haben, die selbe mit Weg-

faſſung ihrer Exponenten vor das Wurzelzeichen als Coefficienten geſetzt werden können; um die ganze Wurzelgröße einfacher auszudrücken.

Z. B. $\sqrt[n]{a^n b^n c^m} = a\sqrt[n]{b^n c^m} = ab\sqrt[n]{c^m}$.

Eben ſo $\sqrt{27} = \sqrt{3^2 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$, $\sqrt{25a^2b^2c^3} = 5ab\sqrt{c^3}$.

195. Erklärung. Wurzelgrößen heiſſen ähnlich oder homogen (ſimiles), wenn ſie 1) gleichnamig ſind (191), 2) einerley Größen unter dem Wurzelzeichen, und 3) homogene Größen vor demſelben haben. Z. B.

$6b\sqrt[m]{cd}$ co $4b\sqrt[m]{cd}$.

196. Aufgabe. Wurzelgrößen zu addiren, oder zu ſubtrahiren.

Auflöſung. Verwandelt ſie, wenn ſie nicht ähnlich ſind (195), in ähnliche (192. 193), und addiret oder ſubtrahiret dann bloß ihre Coefficienten. Laſſen ſie ſich aber nicht in ähnliche verwandeln; ſo wird ihre Addition und Subtraction, wie bey heteroge-

nen Größen, vollbracht. Z. B. $2\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{4} =$

$5\sqrt[3]{4}$. Eben so ist $\sqrt{18} - \sqrt{8} = \sqrt{9.2} - \sqrt{4.2}$
$= 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Beweis. Dieser erhellet aus dem Begriffe der Summe und der Differenz in Beziehung auf Wurzelgrößen von selbst.

197. Aufgabe. Wurzelgrößen zu multipliciren.

Auflösung. Machet sie zu gleichnamigen (192), und multipliciret sowohl die coefficienten durcheinander, als die unter dem Wurzelzeichen stehenden Größen. Dem Producte aus dem unter dem Wurzelzeichen stehenden Größen setzet das gemeinschaftliche Wurzelzeichen vor. Z. B. $2\sqrt{5} \times 3\sqrt{6} = 6\sqrt{30}$, allgemein

$$a\sqrt[n]{b^m} \times b\sqrt[n]{c^r} = ab\sqrt[n]{b^m c^r}.$$

Beweis. Es ist $a\sqrt[n]{b^m} = ab^{\frac{m}{n}}$, und

$b\sqrt[n]{c^r} = bc^{\frac{r}{n}}$; mithin $a\sqrt[n]{b^m} \times b\sqrt[n]{c^r} =$

$ab^{\frac{m}{n}} \times bc^{\frac{r}{n}} = ab\,b^{\frac{m}{n}} c^{\frac{r}{n}} = ab\sqrt[n]{b^m c^r}$ (186).

198. Aufgabe. Wurzelgrößen durcheinander zu dividiren.

Auflösung. Machet sie zu gleichnamigen (192), und dividiret die Coefficienten unter sich,

sich, wie auch die unter dem Wurzelzeichen stehenden Größen unter sich, und setzet dann das gemeinschaftliche Wurzelzeichen an seine gehörige Stelle. Z. B. $V_{12} : V_4 = V_3$, und $\overset{m}{V}abc : \overset{n}{V}a = \overset{n}{V}bc$.

Beweis. Es ist $a\overset{n}{V}b^m : d\overset{n}{V}c^r = ab^{\frac{m}{n}} : dc^{\frac{r}{n}} = \frac{a}{d} : \frac{b^{\frac{m}{n}}}{c^{\frac{r}{n}}} = \frac{a}{d} : \overset{n}{V}\left(\frac{b^m}{c^r}\right)$.

199. Aufgabe. Wurzelgrößen zu verlangten Potenzen zu erheben.

Auflösung. Setzet den Coefficienten unter das Wurzelzeichen (193), und erhebet die Größe unter dem Wurzelzeichen zur verlangten Potenz, mit Beybehaltung des gegebenen Wurzelzeichens. Z. B. $\left(\overset{3}{V}4\right)^3 = \overset{3}{V}4^3 = \overset{3}{V}64$.

Beweis. Es ist $\left(a\overset{n}{V}b^r\right)^m = \left(\overset{n}{V}a^n b^r\right)^m = \left(a^{\frac{n}{n}} b^{\frac{r}{n}}\right)^m = a^{\frac{mn}{n}} b^{\frac{mr}{n}} = \overset{n}{V}a^{mn} b^{mr}$.

200. Aufgabe. Aus einer Wurzelgröße die verlangte Wurzel auszuziehen.

Auf-

Auflösung sammt dem Beweise. Es

ist $\sqrt[r]{(a\sqrt[m]{b^n})} = \sqrt[r]{(\sqrt[m]{a^m}\, b^n)} = \sqrt[r]{a^m}\, b^{\frac{n}{m}}$

$= a^{\frac{m}{mr}} b^{\frac{n}{mr}} = \sqrt{a^m}\, b^n$. Hieraus ergiebt sich die Regel: Stellet den Coefficienten unter das Wurzelzeichen, und multipliciret den Exponenten des gegebenen Wurzelzeichens mit dem Exponenten der verlangten Wurzel.

Viertes Kapitel.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

Erster Theil.

Vorläufige Lehre von den zur Elementar-Algebra gehörigen Problemen und Gleichungen.

Erster Artikel.

Von den zur Elementar-Algebra gehörigen Problemen und Gleichungen überhaupt.

201. Erklärung. Ist der Werth gewisser Größen bekannt, und verlangt man, daß aus denselben der Werth einer oder mehrerer anderen Größen, die mit jenen in Verbindung stehen, abgeleitet werde: so heißt

diese

diese Forderung eine Aufgabe (Problem). Den Werth der unbekannten Größen aus den bekannten finden, heißt das Problem lösen.

202. Erklärung. Die Arten der Verknüpfung der unbekannten Größen mit den bekannten enthalten die Bedingungen (conditiones), von denen die Lösung des Problems abhängt. Sie müssen daher von dem Problemsteller angegeben, und genau von dem, der die Lösung unternimmt, bemerkt werden. Sie heissen schlechthin Bedingungen des Problems.

203. Erklärung. Die Bedingungen (202) führen auf Gleichungen (11), die aus zwey Seiten (membra) bestehen, zwischen welchen das Gleichheitszeichen = liegt. Sind auf beyden Seiten polynomische Größen; so heissen die einzelnen Bestandtheile derselben die Glieder (Termini) der Gleichung.

204. Erklärung. Derjenige Theil der Arithmetik, welcher den Werth der unbekannten Größen aus bekannten vermittelst der Gleichungen zu finden lehrt, heißt Algebra (11).

Anmerkungen.

1) Ueber die etymologische Bedeutung des Worts Algebra, wie auch über die Bedeutung des Namens Coß, oder coßische Arithmetik, welchen die Algebra vor Zeiten führte, ist in meinen 6 mathemat. Dissertationen (Diss. I. Art. I. p. 9.; Diss. III. p. 3.) das Nöthige nach Wucherer und A. Bürja angemerkt.

2) Der Grund, warum die Grundlehren der Algebra über Gleichungen hier in der Elementar-Arithmetik, als vorläufige Lehren, aufgeführt werden, liegt darin, weil die Algebra, als höhere Arithmetik, der Elementar-Arithmetik coordiniret, mithin mit ihr nicht vermengt werden darf, wenn man nach aller Strenge der Methode verfahren will. Warum aber diese Strenge der Methode hier nicht eingehalten worden ist, davon ist der Grund, weil, wie sich Wucherer in seinen Anfangsgründen der Arithmetik (Carlsruhe 1782 §. 175) ausdrückt, die schönsten und kürzesten Beweise der wichtigsten Lehrsätze sowohl, als die leichtesten Auflösungen der Aufgaben in der Mathematik (besonders, wie ich hinzu setze, in der Lehre von Proportio-

tio-

tionen, Progressionen und Logarithmen, wo sogar manche Aufgaben ohne Algebra nicht lößbar sind) sich auf eine, wenigstens etwas genauere Kenntniß der Gleichungen gründen. Dieser Vortheile nicht verlustig zu werden, soll also hier von den ersten Anfangsgründen dieser Materie nur so viel gesagt werden, als Kürze, Gründlichkeit und Deutlichkeit in der Folge verlangen. Und wer dieß noch so gut weiß, hüte sich doch vor der lächerlichen Einbildung, daß er nun die Algebra verstehe. Denn diese fordert ungleich mehr.

205. Erklärung. Die Probleme, so wie die Gleichungen sind entweder von einem reinen Grade, oder von einem vermischten (Gradus vel puri vel mixti s. adfecti), je nachdem die unbekannte Größe in ihnen entweder nur in einer und derselben Potenz vorkömmt, oder in verschiedenen Potenzen. Z. B. die Gleichungen $x^m = b$; und $ax^m - bx^m = cx^m + f$ sind Gleichungen von einem reinen, und zwar vom m^{ten}, d. i. entweder ersten oder zweyten, oder dritten ꝛc.

Grade,

Grade, je nachdem $m = 1$, oder $= 2$, oder $= 3$ ꝛc. gesetzt wird. Diese aber, $x + ax^{\frac{1}{3}} = c$, und $x^2 + ax^{\frac{1}{4}} = d$ wie auch $x^3 + ax^{\frac{1}{3}} = f$ ꝛc. sind vom vermischten, und zwar vom vermischten ersten, oder zweyten, oder dritten ꝛc. Grade, je nachdem der gröste Exponent der Unbekannten entweder 1 oder 2, oder 3 ꝛc. ist. Diejenigen Probleme und Gleichungen vom vermischten Grade, in denen die unbekannte Gröse zwey verschiedene Exponenten von der Art hat, daß der Kleinere die Hälfte vom Gröseren ist, heißen insbesondere Probleme und Gleichungen vom vermischten quadratischen Grade, oder kürzer vermischte quadratische Probleme und Gleichungen. Ihr allgemeiner Ausdruck ist

$$x^m + ax^{\frac{m}{2}} = b.$$

Anmerkung.

Daß manche andere Mathematiker nicht alle voranstehende Ausdrücke eben so bestimmen wie ich, ist mir bekannt. Nur konnte ich ihnen aus guten Gründen, die sich dem Nachdenkenden leicht darbiethen, nicht beystimmen.

206. Erklärung. Gleichungen vom reinen ersten Grade heissen einfache (aequationes simplices); alle übrige aber zusammengesetzte. Daher zerfällt die Algebra (204) in zwey Theile 1) in die Elementar-Algebra, 2) höhere Algebra. Jene beschäftiget sich bloß mit der Auflösung a) aller Gleichungen des reinen Grades, b) der Gleichungen vom vermischten quadratischen Grade (205): diese aber behandelt die übrigen vermischten Gleichungen. Hier ist nur von der Elementar-Algebra die Rede.

207. Erklärung. Das Problem heißt bestimmt, wenn die unbekannte Größe entweder nur einen einzigen bestimmten Werth hat, der der Aufgabe Genüge leistet, oder doch wenigstens nur eine bestimmte Anzahl solcher Werthe statt findet. Dieses ist nun immer der Fall, wenn so viele Gleichungen als unbekannte Größen, statt finden. Daher erklärt man ein Problem auch gemeinhin dann für ein bestimmtes, wenn so viele Gleichungen, als unbekannte Größen, statt finden. Unbestimmt heißt dagegen ein Problem, bey welchem mehrere, von einander nicht abhängige, unbekannte

bekannte Größen Statt finden, als Gleichungen, welches sonach unendlich vieler Auflösungen fähig ist. Endlich ist ein Problem mehr als bestimmt (plus quam determinatum), wenn mehrere Gleichungen, als unbekannte Größen, gegeben sind. Ein solches Problem enthält öfters einen Widerspruch.

208. Aufgabe. Unbekannte Größen aus gegebenen vermittelst der Gleichungen zu finden.

Auflösung. Ist die Gleichung nicht selbst angegeben: so ist die Formation derselben das erste. In dieser Hinsicht unterscheidet genau die gegebenen Quantitäten von den zu findenden, und bezeichnet jene mit den Anfangsbuchstaben des Alphabets a, b, c, ꝛc., oder mit Ziffern: diese aber mit den Endbuchstaben v, w, x, y, z. Nehmet dann die arithmetischen Verbindungen der unbekannten mit den bekannten Größen so vor, wie es den Bedingungen des Problems gemäß ist, und leitet daraus durch Reflexion über die gegebenen Bedingungen die Gleichung selbst her.. Z. B. würde das Problem aufgegeben: eine Zahl zu finden, die der Summe aus ihrer Hälfte, ihrem drit-

ten Theile, und aus der Zahl 10 gleich ist: so würde die Gleichung seyn: $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 10 = x$.

Ist die Gleichung formiret: so ist die Reduction, d. i. die Verwandlung derselben in einen einfacheren Ausdruck das zweyte. In dieser Absicht müssen die etwaigen Brüche, in denen die unbekannte vorkömmt, nach der weiter unten anzugebenden Regel aufgehoben; alle Glieder, welche die unbekannte Größe enthalten, auf eine Seite der Gleichung, und die bekannten auf die andere Seite gebracht, und weiter nach obigen (79) Regeln reduciret werden. Endlich folgt die gänzliche Auflösung selbst; wenn nämlich die reducirte Gleichung nach den weiter unten anzugebenden Regeln noch weiters bearbeitet wird, bis die unbekannte Größe in ihrer ersten Potenz, allein, und positiv auf der einen Seite steht, und auf der andern die anderen Größen vorkommen, deren Werth entweder durchaus bekannt ist, oder doch (wie bey unbestimmten Aufgaben) den Bedingungen des Problems gemäß bestimmt werden kann. Die Regeln aber für die Reduction und Solution der zur Ele-

men-

mentar-Algebra gehörigen Gleichungen stützen sich auf folgenden Grundsatz.

209. Grundsatz. Die Gleichung bleibt, wenn die auf der einen Seite vorgenommene Veränderung auch auf der anderen vorgenommen wird.

210. Zusatz 1. Daher wird die unbekannte von den bekannten, mit denen sie durch Addition oder Subtraction verbunden ist, befreyt, wenn die bekannten auf die andere Seite der Gleichung mit entgegengesetzten Zeichen geworfen werden, welches Versetzen Metathesis heißt. Z. B. wenn $x + a - b = c$; so ist, wenn man beyderseits $a - b$ abziehet, $x + a - b - (a - b) = c - (a - b) = x = c - a + b$. Eben so, wenn $-x = b - c$; so ist, wenn beyderseits $b - c$ abgezogen wird, $-x - (b - c) = b - c - (b - c) = -x - b + c = 0$. Ziehet man nun wieder beyderseits $-x$ ab, so ist $-x - b + c - (-x) = 0 - (-x)$, mithin $c - b = x$. eben so, wenn $-x = -b$; ist $x = b$. (32. V).

211. Zusatz. 2. Ist die unbekannte mit bekannten durch Multiplication verbunden: so geschieht die Trennung, wenn alle

Glieder der Gleichung durch jene bekannte Größen, die die Coefficienten der unbekannten sind, dividiret werden. Z. B. wenn $ax + bx - d = m$; so ist vorerst durch Versetzung $ax + bx = m + d$, und nun $\frac{ax + bx}{a + b} = x = \frac{m + d}{a + b}$

Eben so, wenn $ax + bx - d = cx + f$; so ist vorerst durch Versetzung $ax + bx - cx = f + d$, und nun $x = \frac{f + d}{a + b - c}$ (32. V vergl. mit 52.)

212. Zusatz 3. Ist die Unbekannte mit bekannten durch Division verbunden: so geschieht die Trennung, wenn alle Glieder der Gleichung mit dem Denominator jenes Bruches multiplicirt werden, in welchem die Unbekannte vorkömmt (32 IV. vergl. mit 42). Z. B. wenn $\frac{x}{n} + \frac{bx}{m} = f$; so ist $\frac{xn}{n} + \frac{bxn}{m} = fn$ oder $x + \frac{bxn}{m} = fn$; ferner ist $xm + \frac{bxnm}{m} = fnm$, oder $mx + bnx = fmn$, und nun $x = \frac{fmn}{m + bn}$. Eben so, wenn $\frac{a}{x} + \frac{b}{c} = d$, ist $a + \frac{bx}{c} = dx$,

und

und nun $ac + bx = cdx$, mithin $ac = cdx - bx$, folglich $x = \frac{ac}{cd - b}$. Es erhellet hieraus die Methode, die Brüche in den Gleichungen aufzuheben.

213. Zusatz 4. Stehet die unbekannte auf der einen Seite der Gleichung unter einem Wurzelzeichen: so erhebet beyde Seiten zur Potenz, welche der Wurzel exponent anzeigt. Z. B. wenn $\overset{m}{V}x = b$; so ist $\left(\overset{m}{V}x\right)^m = b)^m$, mithin $x = b^m$. Eben so, wenn $d\overset{n}{V}ax)$ $- b = c$, ist vorerst durch Versetzung $d\overset{n}{V}ax = c + b$, ferner durch Division $\overset{n}{V}ax = \frac{c+b}{d}$, und nun durch Erhebung beyder Seiten zur n^{ten} Potenz, $ax = \left(\frac{c+b}{d}\right)^n$, endlich $x = \left(\frac{c+b}{d}\right)^n : a = \frac{(c+b:d)^n}{a}$.

214. Zusatz 5. Kömmt die unbekannte, wenn sie nach den vorigen Regeln auf eine Seite der Gleichung allein gebracht worden, in einer solchen Potenz vor, daß die ganze Gleichung

eine zusammengesetzte vom reinen Grade (205; 206) ist: so ziehet beyderseits die Wurzel aus dieser Potenz aus. Z. B. wenn $x^2 = b$ so ist $\sqrt{x^2} = \sqrt{b}$ oder $x = \sqrt{b}$. Eben so ist wenn $\frac{a\sqrt[m]{(bx^m - cx^m)} - f}{m} = d$, vorerst durch Aufhebung des Bruchs $a\sqrt[m]{(bx^m - cx^m)} - f = dm$ dann durch Versetzung $a\sqrt[m]{(bx^m - cx^m)} = dm + f$, ferner durch Division $\sqrt[m]{(bx^m - cx^m)} = \frac{dm + f}{a}$, ferner durch Erhebung beyder Seiten zur mten Potenz $bx^m - cx^m = \left(\frac{dm + f}{a}\right)^m$, weiters durch Division $x^m = \frac{\left[(dm + f) : a\right]^m}{b - c}$, und nun $x = \sqrt[m]{\left(\frac{\left[(dm + f) : a\right]^m}{b - c}\right)}$.

215. Zusatz. 6. Kömmt die Unbekannte in allen Gliedern der gegebenen Gleichung mit verschiedenen Exponenten vor; so dividiret vor allem ein jedes Glied der Gleichung durch die Unbekannte mit dem geringsten Exponens; ist

dann

dann die Potenz der Unbekannten in der neuen Gleichung nur Eine, oder, was dasselbe ist, die neue Gleichung eine reine: so verfahrt nach den vorausgehenden Regeln. Z. B. wenn $ax^4 - bx^3 = fx^3$, : so ist $ax - b = f$ mithin $x = \frac{f+b}{a}$.

Anmerkung.

Diese Regeln (von 210—215) sind bey der Auflösung aller zur Elementar-Algebra gehörigen Probleme und Gleichungen einzuhalten, und daher allgemeine: Die besonderen Folgen in den untergesetzten Abschnitten, als welche sich mit den zur Elementar-Algebra gehörigen besonderen Problemen und Gleichungen beschäftigen.

Zweyter Artikel.

Von den zur Elementar-Algebra gehörigen Problemen und Gleichungen insbesondere.

I. Classe.

Von den bestimmten Problemen.

1. Section.

Von den bestimmten Problemen in einfachen Gleichungen.

216. Aufgabe. Einfache Gleichun-

gen aufzulösen, in denen nur eine einzige unbekannte Größe vorkömmt.

Auflösung. Hebet 1) die Brüche, in denen die Unbekannte vorkömmt (212), 2) bringet alle Glieder, welche die Unbekannte enthalten, auf diejenige Seite der Gleichung, wo sie nach vorgenommener Reduction positiv wird, 3) befreyet die Unbekannte von ihren Coefficienten (211), und dem Radicalzeichen, wenn sie etwa unter einem solchen steht (213).

Beyspiele.

I. Aufgabe. Ein Lehrer gab auf die Frage, wie viel er Schüler habe? die Antwort: die Hälfte derselben studirt Logik, der 5te Theil Metaphysik, der 10te Theil Mathesis, und 26 = a widmen sich der Geschichte. Es fragt sich nun, wie groß ist die Zahl = x dieser Schüler?

Auflösung. Die Gleichung ist $\frac{x}{2} + \frac{x}{5} + \frac{x}{10} + a = x$, mithin 1) durch Aufhebung der Brüche $x + \frac{2x}{5} + \frac{2x}{10} + 2a = 2x$ dann $5x + 2x + x + 10a = 10x$ 2) Durch Reduction: $8x + 10a = 10x$ 3) Durch

Me-

Metathesis: $10a = 2x$ 4) Durch Division:

$$x = \frac{10a}{2} = 5a = 5 \times 26 = 130.$$

Beweis. Dieser gefundene Werth für x passet genau in die richtig formirte Gleichung: also ist er selbst richtig.

II. Aufgabe. Bamberg ist von Würzburg 18 Stunden = a entfernt. Ein Bothe, der von Würzburg nach Bamberg reiset, machet jeden Tag 4 Stunden = b, und ein Bothe, der auf dem nämlichen Tage von Bamberg nach Würzburg auf der nämlichen Straße geht, legt jeden Tag 5 Stunden = c zurücke: wann begegnen sich diese Bothen?

Auflösung. Sie begegnen sich, wann die Summe der von ihnen beyden zurückegelegten Stunden = 18 ist. Der Tag ihres Zusammentreffens ist = x. Also sind die vom Würzburger Bothen zurücke gelegten Stunden = $b \times x =$ bx, und die des Bamberger Bothen = $c \times x =$ cx, mithin sind sie beysammen, wenn $bx + cx = a$, folglich $x = \frac{a}{b+c} = \frac{18}{9} = 2$. Der Beweis für diese und die folgenden Auflösungen ist der nämliche, wie bey dem Beyspiele I.

III.

III. Aufgabe. Eine Stadt N. soll von Würzburg 300 Stunden entfernt liegen. Ein Bothe von Würzburg, der dahin schon vor 4 Tägen = a abgegangen, machet jeden Tag 6 Stunden = c; ein Anderer aber, der von Würzburg 4 Täge später dahin abgeht, machet jeden Tag 8 Stunden = d. Es fragt sich, in wie vielen Tägen = x hohlet der letztere den ersten ein?

Auflösung. Beyde treffen zusammen, wenn sie gleich viele Stunden auf der nämlichen Straße zurücke gelegt haben. Nun sind die Stunden des früher abgegangenen = ac + cx, und die des letzteren = dx, mithin treffen sie zusammen, wenn ac + cx = dx. Da cx < dx; so ist ac = dx — cx, mithin $x = \frac{ac}{d-c} = \frac{24}{2}$ = 12.

IV. Aufgabe. Auf die Frage, wie viele Kreuzer er im Sacke habe, gab Cajus die Antwort: wenn ich dieselben = x unter 3 Personen so theile, daß die erste die Hälfte davon und einen darüber, die andere von den übrigen wieder die Hälfte, und einen darüber, und die dritte von den übrigen wieder die Hälfte, und drey

darüber bekömmt: so bleibt mir kein einziger Kreu-
zer mehr übrig. Was ist x?

Auflösung. Die Portion des Ersten ist $= \frac{x}{2} + 1$, mithin die Zahl der übrig bleiben-
den Kreußer $= x - \left(\frac{x}{2} + 1\right) = x - \frac{x}{2} - 1 = \frac{x}{2} - 1$ also die Portion des zweyten
$= \frac{x}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$. Nun ist die Zahl der noch übrigen Kreuzer $= \frac{x}{2} - 1 - \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{x}{2} - 1 - \frac{x}{4} - \frac{1}{2} = \frac{x}{4} - \frac{3}{2}$, also die Portion des dritten $= \frac{x}{8} - \frac{3}{4} + 3 = \frac{x}{8} + \frac{9}{4}$. Daher nun die Gleichung

$$\frac{x}{2} + 1 + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} + \frac{x}{8} + \frac{9}{4} = x,$$ wo

1) durch Aufhebung der Brüche ist: $x + 2 + \frac{x}{2} + 1 + \frac{x}{4} + \frac{18}{4} = 2x$, dann $2x + 4 + x + 2 + \frac{x}{2} + 9 = 4x$, ferner $4x + 8 + 2x$

$2x + 4 + x + 18 = 8x$ 2) durch Reduction: $7x + 30 = 8x$ 3) durch Metathesis: $30 = 8x - 7x = x$.

V. Aufgabe. Ein Silberschmied hat zwey Silbermassen A und B. Die Masse A ist 15löthig (d. i. die Mark $= \frac{1}{2}$ Pfund $= 16$ Loth davon hat 15 Loth reines Silber, und 1 Loth Zusatz), die Masse B aber 12löthig. Er will aus der Mischung beyder Massen eine Masse von 20 Pfunden $= m$ machen, die 14löthig sey. Es fragt sich, wie viel Pfund muß er von A und von B nehmen?

Auflösung. Die Zahl der Pfunde von A sey x; so ist die Zahl der Pfunde von $B = m - x$. Setzt man nun 15 Loth $= a$, 12 Loth $= b$, und 14 Loth $= c$; so ist das reine Silberquantum in $x = ax$, und in $m - x = b(m - x) = bm - bx$, und in $m = cm$. Nun ergibt sich nach der Bedingung der Aufgabe die Gleichung

$ax + bm - bx = cm$, mithin $x = \frac{cm - bm}{a - b}$

$= m \cdot \frac{c - b}{a - b} = 13\frac{1}{3}$ Pf. Es erhellet von selbst, daß der Werth für c ein mittlerer zwischen a und b seyn müsse.

VI.

VI. Aufgabe. Ein Eimer von einem Fasse Wein kostet 60 fl. = a. Der Wirth will dieses Faß mit Wasser mischen, um durch diese Mischung 18 Eimer = m zu erhalten, wovon ein jeder nur 40 fl. = b koste: es fragt sich, wie viele Eimer Wein, und wie viel Wasser muß er nehmen?

Auflösung. Nimmt er vom Weine x Eimer: so muß er vom Wasser m — x Eimer nehmen. Der Geldwerth von x ist nun = ax, von m aber = bm, und vom Wasser m — x = o, mithin da ax = bm seyn muß: so ist

$$x = m \cdot \frac{b}{a} = 18 \cdot \frac{40}{60} = 12 \text{ Eimer.}$$

VII. Aufgabe. Es sind zwey Sorten Wein zu mischen. Von der ersten Sorte A kostet der Eimer 80 fl. = a, von der zweyten B aber 40 fl. = b. Aus der Mischung sollen 30 Eimer = m erhalten werden, wovon ein jeder 50 fl. = c koste. Es fragt sich, wie viele Eimer müssen von A, und wie viele von B genommen werden?

Auflösung. Ist die Zahl der Eimer von A = x, so ist die von B = m — x. Der Geldwerth von x ist = ax, von m — x

$= b(m - x) = bm - bx$ und von $m = cm$.

Also ist die Gleichung: $ax + bm - bx = cm$,

mithin $x = \frac{cm - bm}{a - b} = m \cdot \frac{c - b}{a - b}$

Anmerkung. Die Rechnung in der V. VI. VII. Aufgabe heißt Alligations-Rechnung.

217. Aufgabe. Einfache Gleichungen aufzulösen, in denen eben so viele unbekannte Größen vorkommen, als Gleichungen sind.

Auflösung. Suchet in der ersten Gleichung den Werth einer Unbekannten, welche auch in den folgenden Gleichungen vorkömmt; substituiret dann diesen Werth in allen folgenden Gleichungen an die Stelle dieser nämlichen Unbekannten; damit auf diese Weise diese Unbekannte in den folgenden Gleichungen verschwinde (eliminiret werde): suchet ferner aus der so erhaltenen zweyten Gleichung den Werth einer anderen Unbekannten, die in der dritten Gleichung vorkömmt, und verfahret mit ihm, wie vorhin. Setzet dieses Verfahren fort, bis ihr aus der letzten Gleichung den Werth der da noch vorkommenden letzten unbekannten findet, und nun

durch

durch ihn auch die Werthe der vorausgehenden Unbekannten bestimmen könnet.

Beyspiele.

I. Aufgabe. Zwey Zahlen zu finden, x und y, deren Summe $x + y = 60 = s$, und Differenz $x - y = 20 = d$.

Auflösung. Es ist I) $x + y = s$, und II) $x - y = d$. Mithin aus I: $x = s - y$, folglich die Gleichung II: $s - y - y = d$ oder $s - 2y = d$, daher $\frac{s - d}{2} = y = 20$ und $x = 40$. Hätte man aus der Gleichung I den Werth für y gesucht, der $= s - x$ ist, und nun diesen in der Gleichung II substituiret: so würde man am Ende auf die Gleichung $x = \frac{s + d}{2}$ gekommen seyn. Woraus sich der allgemeine Satz ergibt: Von zwey ungleichen Größen x und y ist die größere x gleich der halben Summe, mehr der halben Differenz beyder Größen; und die kleinere y ist gleich der halben Summe, weniger der halben Differenz beyder Größen.

II. Aufgabe. Auf die Frage, wie alt

seine drey Söhne seyen, gab der Vater zur Antwort: das Alter des Ersten = x macht mit dem Alter des zweyten = y 38 Jahre = a; das Alter des ersten mit dem Alter des dritten = z gibt 34 Jahre = b, das Alter des zweyten aber macht mit dem Alter des dritten 32 Jahre = c: Was ist nun x, y, z?

Auflösung. Die drey Gleichungen sind I) $x + y = a$, II) $x + z = b$, III) $y + z = c$. Aus der I. Gleichung ist $x = a - y$, mithin die II. Gleichung $a - y + z = b$, folglich $z = b - a + y$, also nun die III. Gleichung: $y + b - a + y = c$, folglich $y = \frac{c + a - b}{2} = 18$, mithin $x = a - y = 20$, und $z = b - a + y = 14$.

III. Aufgabe. Aus den 4 Gleichungen I) $x + y = a$, II) $x + z = b$, III) $y + z = d$, IV) $y + v = f$ die Unbekannten x, y, v, z, zu finden.

Auflösung. Aus I) ist $x = a - y$, mithin II) $a - y + z = b$, folglich $z = b - a + y$, mithin III) $y + b - a + y = d$, folglich $y = \frac{d - b + a}{2}$, mithin IV) $\frac{d - b + a}{2} + v = f$,

$= f$, daher $v = \frac{2f - d + b - a}{2}$ *Ziehet man die erste Gleichung von der 2ten ab: so erhält man die Gleichung $z - y = b - a$, und mithin statt obiger 4 nur folgende 3 Gleichungen I) $z - y = b - a$, II) $y + z = d$, III) $y + v = f$, woraus die nämlichen Werthe für z, y, v gefunden werden.

2. Section.

Von den bestimmten Problemen in zusammengesetzten Gleichungen.

218. Aufgabe. Zusammengesetzte Gleichungen eines reinen Grades aufzulösen.

Auflösung. Die allgemeine Form solcher Gleichungen ist $x^m = q$. Daher ist nun $x = \sqrt[m]{q}$ (214). Z. B. eine Zahl zu finden, deren Cubus zu 3 addiret die Zahl $3\frac{1}{64}$ gebe. Da ist $x^3 + 3 = 3\frac{1}{64}$ mithin $x = \sqrt[3]{\frac{1}{64}}) = \frac{1}{4}$

219. Aufgabe. Zusammengesetzte Gleichungen eines vermischten quadratischen Grades aufzulösen.

Auflösung. Die allgemeine Form solcher

Gleichungen ist: $x^m \pm ax^{\frac{m}{2}} = p$. Ist also eine gegebene Gleichung nach den obigen Regeln so weit reducirt, daß die Unbekante auf der einen Seite der Gleichung allein stehet, und zwar so, daß ihr kleinster Exponens die Hälfte vom größten ist: so ist die ganze Gleichung eine vermischte quadratische. Die Auflösung derselben beruhet nun auf folgendem Verfahren.

1) Die Unbekannte mit dem größten Exponenten muß positiv seyn, und keinen andern Coefficienten haben, als 1. Denn sie gilt als das Quadrat des ersten Terminus der aus dem Quadrate $x^m \pm 2ax^{\frac{m}{2}}$ auszuziehenden Wurzel. Jeder erste Terminus einer polynomischen Wurzel aber gibt im Quadrate nur sein eigenes Quadrat, hat mithin nur 1 zum Coefficienten; ferner ist jedes Quadrat einer beliebigen Wurzel positiv (159). Ist demnach die Unbekannte mit dem größten Exponenten negativ; so verändert die Zeichen aller Glieder der Gleichung, um sie positiv zu machen; und hat sie einen andern Coefficienten, als 1, so dividiret alle Glieder der Gleichung durch diesen Coefficienten.

ten. Z. B. aus $-3bx^m \mp ax^{\frac{m}{2}} = c$ mas

chet $x^m \mp \frac{ax^{\frac{m}{2}}}{3b} = -\frac{c}{3b}$.

2) Das Quadrat $x^m \mp ax^{\frac{m}{2}}$ ist ein unvollständiges. Denn da es aus zwey Terminen besteht: so muß die Wurzel desselben eine polynomische seyn, indem eine monomische Wurzel im Quadrate nur einen Terminus gibt. Nun aber gibt eine binomische Wurzel schon drey Terminen im Quadrate. Also.

3) Um demnach die quadratische Wurzel genau ausziehen zu können, was geschehen muß, um das x zu finden: so muß das Quadrat $x^m \mp ax^{\frac{m}{2}}$ vollkommen gemacht werden. Und dieses geschieht, wenn man alle Coefficienten der Unbekannten mit dem geringsten Exponens durch 2 dividiret, den Quotus, als 2te Radicalnote zum Quadrate eleviret, und dieses Quadrat auf beyden Seiten der Gleichung addiret. Denn da x^m als das Quadrat der ersten Radicalnote gilt, die erste Radicalnote sonach $= x^{\frac{m}{2}}$ ist: so

muß $\pm ax^{\frac{m}{2}}$, d. i. die Summe aller übrigen Terminen des Quadrats, in welchem die Unbekannte mit dem geringsten Exponens vorkömmt, als das Product aus der ersten Radicalnote in das Doppelte der zweyten gelten, weil nur in diesem Producte die erste Note einer binomischen Wurzel vorkommen kann. Die Summe der Coefficienten der Unbekannten mit dem geringsten Exponens ist also stäts das Doppelte der zweyten Radicalnote; muß mithin durch 2 dividiret werden, um die einfache zweyte Radicalnote zu erhalten. Da nun das Quadrat dieser zweyten Radicalnote im Quadrate $x^m \pm ax^{\frac{m}{2}}$ mangelt: so muß es hinzugesetzt, und zwar auf beyden Seiten der Gleichung addiret werden, damit die Gleichheit bleibe.

4) Das vollkommene Quadrat wäre sonach $x^m \pm ax^{\frac{m}{2}} + \frac{a^2}{4}$ und nun die vollkommene quadratische Gleichung diese: $x^m \pm ax^{\frac{m}{2}} + \frac{a^2}{4} = p + \frac{a^2}{4}$.

5) Ziehet beyderseits die Quadratwurzel aus;

aus; und ihr erhaltet die Gleichung: $x^{\frac{m}{2}} \mp \frac{a}{2} = \mp V\left(p + \frac{a^2}{4}\right)$. Daher durch Metathesis: $x^{\frac{m}{2}} = \mp \frac{a}{2} \mp V\left(p + \frac{a}{4}^2\right)$. Da nun $x^{\frac{m}{2}} = V x^m$: so ist $V x^m = \mp \frac{a}{2} \mp V\left(p + \frac{a}{4}^2\right)$, mithin

$$x^m = \left[\mp \frac{a}{2} \mp V\left(p + \frac{a}{4}^2\right)\right]^2, \text{ und folglich}$$

$$x = \sqrt[m]{\left[\mp \frac{a}{2} \mp V\left(p + \frac{a^2}{4}\right)\right]^2}.$$

Anmerkung.

1) Dem V wird das doppelte Zeichen $\mp$ vorgesetzt, weil jede Quadratwurzel positiv oder negativ seyn kann. Welche von beyden genommen werden müsse; hängt davon ab, welche von beyden den gegebenen Bedingungen der Aufgabe Genüge leiste. Manchesmahl leisten beyde Genüge. Z. B. in der Aufgabe $x^2 = x$, wo $x = \frac{1}{2} \mp V\frac{1}{4}$ gefunden wird, und sonach entweder $= 1$ oder $= 0$ ist.

2) Das doppelte Product $ax^{\frac{m}{2}}$ hat das doppelte Zeichen $\pm$, weil dasselbe entweder positiv, oder negativ ist, je nachdem beyde Radicalnoten entweder positiv oder negativ, oder die eine positiv, und die andere negativ ist.

Auch könnte die $\sqrt{x^m} = x^{\frac{m}{2}}$ unter dem doppelten Zeichen $\pm$ angesetzt werden. Allein man will wissen, was $+x$ sey, und daher wird $x^{\frac{m}{2}}$ nur positiv angesetzt.

220. Zusatz. Setzt man im Schema $x^m \pm ax^{\frac{m}{2}} = p$ den Exponens $m = -n$, oder $= \frac{n}{r}$, oder $= -\frac{n}{r}$: so erhält man im ersten Falle $x = \frac{1}{\sqrt[n]{\left[\pm\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(p + \frac{a}{4}^2\right)}\right]^2}}$, im zweyten: $x = \sqrt[n]{\left[\pm\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(p + \frac{a}{4}^2\right)}\right]^{2r}}$ und im dritten:

$$x = \frac{1}{\sqrt[n]{\left[\pm\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(p + \frac{a}{4}^2\right)}\right]^{2r}}}.$$

Einige

Einige Beyspiele.

1) Aufgabe. Zwey Zahlen zu finden, deren Differenz $x - y = d = 3$, und Product $xy = f = 18$ sey.

Auflösung. Aus der ersten Gleichung ist $x = d + y$, mithin ist durch Substitution die 2te Gleichung: $y^2 + dy = f$, folglich $y^2 + dy + \frac{d^2}{4} = f + \frac{d^2}{4}$, mithin $y + \frac{d}{2} = \pm \sqrt{(f + \frac{d^2}{4}}$, und $y = -\frac{d}{2} \pm \sqrt{(f + \frac{d^2}{4})}$

$= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{(18 + \frac{9}{4})} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{(\frac{81}{4})} = -\frac{3}{2} \pm \frac{9}{2} = 3$ oder $= -6$.

Beyde Werthe entsprechen den Bedingungen des Problems.

II. Aufgabe. Zwey Zahlen zu finden, deren Product $xy = f = 6$, und die Summe ihrer Quadrate $x^2 + y^2 = S = 13$ sey.

Auflösung. Aus der ersten Gleichung ist $x = \frac{f}{y}$, mithin ist die 2te Gleichung; $\frac{f^2}{y^2} + y^2 = S$, folglich $f^2 + y^4 = Sy^2$, mithin

y^4

$y^4 - Sy^2 = -f^2$, ferner $y^4 - Sy^2 + \frac{S^2}{4} = \frac{S^2}{4} - f^2$ also $y^2 - \frac{S}{2} = \pm V\left(\frac{S^2}{4} - f^2\right)$, daher $y^2 = \frac{S}{2} \pm V\left(\frac{S^2}{4} - f^2\right)$, und $y = V\left[\frac{S}{2} \pm V\left(\frac{S^2}{4} - f^2\right)\right]$. Durch Substitution wird $y = 3$ oder $= 2$, und dort wird $x = 2$, hier aber $= 3$, wo wieder erhellet, daß $V\left(\frac{S^2}{4} - f^2\right)$ positiv oder negativ genommen werden könne.

Anmerkung.

Manchesmahl scheint eine zusammengesetzte Gleichung weder von einem reinen, noch vom vermischten quadratischen Grade zu seyn, und ist doch nach den zeither vorgetragenen Principien lösbar, wenn man sie nur nach eben diesen Principien auf einen einfacheren Ausdruck gehörig zu reduciren versteht. Z. B. dient die Aufgabe: zwey Zahlen x und y von der Art zu finden, daß der Cubus der ersten dem Quotus aus der Division der ersten durch die zweyte; und das Product aus dem Quadrate der ersten

in den Cubus der zweyten dem Quotus aus der Division der zweyten durch das Quadrat einer jeden beliebigen Zahl n gleich sey.

Auflösung. Die zwey Gleichungen sind I) $x^3 = \frac{x}{y}$, II) $x^2 y^3 = \frac{y}{n^2}$. Aus I) ist $x^3 y = x$, mithin $x^2 y = 1$. Folglich $y = \frac{1}{x^2}$ Sonach ist die 2te Gleichung: $\frac{x^2}{x^6} = \frac{1}{n^2 x^2}$, oder $\frac{1}{x^4} = \frac{1}{n^2 x^2}$, mithin $n^2 x^2 = x^4$ folglich entweder nach (215) $n^2 = x^2$, u. mithin $n = x$, oder durch Versetzung: $x^4 - n^2 x^2 = 0$, mithin $x^4 - n^2 x^2 + \frac{n^4}{4} = \frac{n^4}{4}$, folglich $x^2 - \frac{n^2}{2} = \pm V\left(\frac{n^4}{4}\right)$ und daher $x = V\left[\frac{n^2}{2} \pm V\left(\frac{n^4}{4}\right)\right] =$ $V\left(\frac{n^2}{2} \pm \frac{n^2}{2}\right) = n$, wo dann $y = \frac{1}{n^2}$.

II. Classe.

Von den unbestimmten Problemen.

221. Aufgabe. Die Gleichungen unbestimmter Aufgaben aufzulösen.

Auf-

Auflösung. Ist man durch das Verfahren nach den vorigen Regeln auf eine Finalgleichung gekommen, auf deren einer Seite eine Unbekannte allein steht, auf der anderen aber auch noch eine oder mehrere Unbekannten mit bekannten verbunden, vorkommen; wie dieses immer der Fall ist, wenn die Aufgabe unbestimmt ist; so setze man für die Unbekannten auf der anderen Seite passende, d. i. solche Werthe, welche mit den auf eben dieser anderen Seite vorkommenden Bekannten verbunden die auf der ersten Seite allein stehende Unbekannte so bestimmen, daß den Bedingungen der Aufgabe Genüge geschehe.

Beyspiele.

1. Aufgabe. Zwey Zahlen zu finden, welche durcheinander dividiret den Quotus 40 geben.

Auflösung. Da $\frac{x}{y} = 40$: so ist $x = 40y$. Setzt man nun $y = 1, 2, 3$ ꝛc., so wird $x = 40, 80, 120$ ꝛc., wo von selbst erhellet, daß die Aufgabe unendlich viele Auflösungen zulasse.

2. Aufgabe. Ein Weinhändler hat drey-

dreyerley Sorten Wein A, B, C. Von A kostet der Eimer 40 fl. = a, von B 80 fl. = b, von C 60 fl. = c. Er will sie nun so mischen, daß 50 Eimer = m, jeder zu 50 fl. = d herauskommen, und fragt, wie viele Eimer von jeder Sorte zu nehmen seyen?

Auflösung. Nennt man die von A zu nehmenden Eimer = x, die von B = y, und die von C = z: so ist nach der Bedingung der Aufgabe I) $x + y + z = m$, II) $ax + by + cz = dm$. Da nun aus I) $x = m - y - z$: so geht durch Substitution dieses Werthes für x die Gleichung II) in diese über:

$am - ay - az + by + cz = dm$, woraus

$$y = \frac{dm - am + az - cz}{b - a} =$$

$$\frac{(d - a)m + (a - c)z}{b - a} = \frac{500 - 20z}{40}$$

erhalten wird. Hier muß nun z bestimmt werden, und zwar durch Zahlen, welche mit 20 multiplicirt ein Product geben, das < 500 ist. Denn würde $20z = 500$, oder > 500: so würde dort $y = 0$, und hier negativ, welches beydes der Bedingung der Aufgabe widerstreitet.

z muß sonach < 25 seyn. Denn da $500 > 20\,z$ seyn muß: so muß auch $\frac{500}{20} > z$ d. i. $25 > z$ seyn.

Setzt man sonach

	$z =$	1	2	3	...	24	$24\frac{1}{2}$	$24\frac{1}{4}$	...
so ist	$y =$	12	$11\frac{1}{2}$	11	...	$\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	...
	$x =$	37	$36\frac{1}{2}$	36	...	$25\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{4}$	$25\frac{3}{8}$	...

3. Aufgabe. Drey positive Zahlen x, y, z von der Art zu finden, daß die Summe aus der ersten, dem doppelten der zweyten, und dem Dreyfachen der dritten $= 105$ sey.

Auflösung. Nach der Bedingung der Aufgabe ist $x + 2y + 3z = 105$, mithin $x = 105 - 2y - 3z$. Soll nun x positiv werden, so muß $105 > 2y + 3z$, mithin auch $105 - 3z > 2y$, folglich auch $\frac{105 - 3z}{2} > y$ seyn. Damit nun auch y positiv werde, so muß $105 > 3z$, mithin $\frac{105}{3} = 35 > z$ seyn. Ferner muß, damit x positiv werde, auch $105 - 2y > 3z$, mithin $\frac{105 - 2y}{3} > z$ seyn, und folglich, damit auch z positiv werde, $105 > 2y$,

mit-

mithin $\frac{105}{2} = 52\frac{1}{2} > y$ seyn. Demnach muß, damit die drey gesuchten Zahlen positiv werden, $z < 35$, und $y < 52\frac{1}{2}$; jedoch der Werth für z und y von der Art seyn, daß $2y + 3z < 105$ werde. Setzt man demnach z. B. $y = 50$, mithin $2y = 100$, so muß, damit x positiv werde, $105 > 100 + 3z$, mithin $105 - 100 = 5 > 3z$, sonach $\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3} > z$ seyn. Da nun unendlich viele positive Zahlen $< 1\frac{2}{3}$ sind, so folgt, daß, wenn man auch stäts $y = 50$ setzt, die Aufgabe doch noch immer unendlich viele Auflösungen in positiven Zahlen zulasse. Z. B.

$y =$	50	50	....
$z =$	1	$1\frac{1}{3}$	....
$x =$	2	1	....

4. Aufgabe. Zwey Zahlen zu finden, deren Summe zu ihrem Producte addiret, die Zahl 79 gebe.

Auflösung. Da nach der Bedingung der Aufgabe $x + y + xy = 79$; so ist (per Metathesin) $xy + y = 79 - x$, mithin

y

$y = \frac{79 - x}{x + 1} = -1 + \frac{80}{1 + x}$. Da nun hier $1 + x$ ein Divisor von 80 ist; Divisoren von 80 aber die Zahlen 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80 sind; so kann $x = 0, 1, 3, 4, 7$ ꝛc. werden, und dann ist $y = 79, 39, 19, 15, 9$, ꝛc. *) Euler vollst. Anleit. zur Algebra S. 249.

5. Aufgabe. Aus den 3 Gleichungen I) $x + y = a$, II) $y + z = b$, III) $z - x = d$ die Unbekannten x, y, z zu finden.

Auflösung. Verfährt man hier nach der Regel der Substitution (217): so verschwindet in der Finalgleichung die Unbekannte. Der Grund davon ist, weil die dritte Gleichung keine neue Bedingung enthält; denn zieht man die erste Gleichung von der zweyten ab: so entsteht die dritte $z - x = b - a = d$, zum Zeichen, daß die Bedingung, welche in der dritten Gleichung ausgedrückt ist, in den Bedingungen der beyden ersten schon enthalten sey. Das Problem ist sonach unbestimmt, und muß, als solches, nach der Regel (221) gelöset werden.

Schlußanmerkungen.

1) Wenn bey unbestimmten Aufgaben die Bedingung vorkömmt, daß man die Unbe-

kann-

kannten in positiven ganzen Zahlen finden solle: so verfahre man nach der, aus der Auflösung folgender Aufgabe ersichtlichen Methode. Aufgabe. Von zwey Sorten Tuch A und B, wo die Elle von A 15 fl., und von B 11 fl. kostet, sind für 1100 fl. Ellen verkauft worden. Es fragt sich, wie viele ganze Ellen = x von A und wie viele = y von B verkauft worden seyen? Auflös. Es ist $15x + 11y = 1100$ fl.: mithin $y = \frac{1100 - 15x}{11} = 100 - x - \frac{x}{11}$.

Man setze nun $\frac{4x}{11} = m$; so ist $x = \frac{11m}{4} = 2m + \frac{3m}{4}$. Man setze wieder $\frac{3m}{4} = n$; dann ist $m = \frac{4n}{3} = n + \frac{n}{3}$. Setzet wieder $\frac{n}{3} = p$; und es ist $n = 3p$, folglich $m = 4p$; mithin $x = 11p$, und $y = 100 - 15p$. Hier erhellet nun, daß p bestimmt werden müsse, und zwar 1) in ganzen Zahlen, damit die Bedingung der Aufgabe erfüllet werde, 2) in solchen ganzen Zahlen, welche mit 15 multipliciret ein Product geben, welches < 100 ist. Denn sonst wäre y entweder = 0, oder eine

negative Größe, welches beydes doch der Bedingung der Aufgabe widerstreitet. Setzt man

also	p =	1	2	3	4	5	6
so ist	x =	11	22	33	44	55	66
	y =	85	70	55	40	25	10

wollte man noch weiter p = 7 setzen: so würde y = 100 — 15 p = 100 — 105 = — 5, zum Zeichen, daß das Problem nur 6 Auflösungen nach der angegebenen Bedingung habe. Mehrere dergleichen Aufgaben finden sich in der dritten meiner 6 mathematischen Dissertationen, wo auch die, in der Geometrie besonders anwendbare, und daher der Aufmerksamkeit des Anfängers besonders werthe Auflösung der Aufgabe vorkömmt, drey ganze Zahlen von der Art zu finden, daß das Quadrat der grösten den Quadraten der beyden anderen zusammengenommen gleich sey.

2) Bey mehr als bestimmten Aufgaben ist es zufällig, wenn diejenigen Bedingungen, welche die Aufgabe zu einer mehr als bestimmten machen, mit den gefundenen Werthen der Unbekannten zusammenstimmen. Oft involviren solche Aufgaben einen Widerspruch.

Z. B. zwey Zahlen zu finden, deren Summe = 15, Differenz = 3, und sie selbst gerade Zahlen seyen. Hier liegt der Widerspruch darin, daß beyde Zahlen gerade seyn, und doch eine ungerade Summe geben sollen. Setzte man aber statt der dritten Bedingung diese: daß die größere von beyden Zahlen = x dem Quadrate der Differenz beyder Zahlen gleich seyn solle: so würde man aus den Gleichungen $x + y = 15$, $x - y = 3$ das $x = 9$ und $y = 6$ erhalten, und zufälliger Weise wäre nun zugleich $x = 9 = (9-6)^2 = 3^2$.

3) Die Anleitung zur Auflösung solcher Gleichungen, die von einem anderen Grade sind als die zeither behandelten, z. B. der vermischten cubischen; findet man in jeder vollständigen Anleitung zur Algebra, z. B. in der von H. Leonard Euler verfaßten, und zu St. Petersburg 1770 herausgegebenen „vollständigen Anleitung zur Algebra" welche wir hiemit den Anfängern zum Gebrauche anempfehlen.

Zweyter Theil des vierten Kapitels.

Von Verhältnissen und Proportionen überhaupt, und den arithmetischen insbesondere.

222. Erklärung. Verhältniß überhaupt (ratio) ist die Bestimmung einer Vorstellung durch eine andere. Diese Vorstellungen sind aber Vorstellungen entweder der Qualität, oder der Quantität: daher ist das Verhältniß entweder das qualitative oder quantitative. Jenes wird gemeinhin auch das philosophische, dieses aber das mathematische genannt. Ein Beyspiel des ersten liefert der Satz „Cajus ist des Titus Vater" wie auch der „die Mäßigkeit ist lobenswerth"; und des andern der „8 Gulden sind größer als 5 Gulden." Wir handeln hier bloß vom mathematischen Verhältnisse, und erklären dasselbe mit anderen Worten für die Vergleichung zweyer Größen a und b, wobey man darauf sieht, wie die Eine aus der andern entstehe. Die beyden Größen a und b heißen Glieder des Verhältnisses, und zwar diejenige, welche zuerst gesetzt wird, das Vorderglied (Terminus antecedens, oder schlechthin das Antecedens)

cedens), die andere aber das Hinterglied (Consequens); zwischen beyde setzen wir zwey übereinander stehende Puncte, z. B. a:b, d. i. die Größe a verhält sich zur Größe b; oder schlechthin a zu b.

223. Zusatz 1. Die Glieder des mathematischen Verhältnisses müssen gleichartig (1) seyn. Denn von ungleichartigen Größen, als solchen, kann keine aus der anderen erzeugt werden, z. B. Flächen nicht aus Linien. Ob nun gleich positive und negative Größen, als entgegengesetzte Größen, ungleichartig sind (68), und als solche nicht im Verhältnisse zu einander stehen können: so lassen sie sich doch in gleichartige verwandeln, und dann aus einander erzeugen, nur daß dann statt der Addition die Subtraction, und umgekehrt angewendet werden muß (69). Z. B. 3 Meilen östlich = + 3 werden aus 4 Meilen westlich = — 4 erzeugt, wenn man + 7 zu — 4, d. i. 7 Meilen östlich zu 4 Meilen westlich hinzu thut; mithin kann zwischen positiven und negativen Größen allerdings ein Verhältniß statt finden. *) Jo. Schulz Anfangsgründe der r. Math. S. 172.

224. Zusatz 2. Eine Größe = b kann aus einer anderen mit ihr gleichartigen = a nur auf zweyerley Art entstehen: entweder 1) dadurch, daß man die Differenz beyder Größen zu a entweder addiret, oder von a subtrahiret; oder 2) dadurch, daß man a mit der Zahl = q multipliciret, welche anzeigt, wie oft und wie das a in b enthalten sey, mithin mit dem Quotus, welcher aus der Division des b durch a entsteht *).

Dort

---

*) Wir wissen, daß Herr Schulz in seinen Anfangsgründen der r. Mathesis S. 178 Anmerk. 2. diese Erklärung des geom. Verhältnisses aus dem Grunde tadle, weil sie bloß auf diejenigen Verhältnisse passe, wo beyde Glieder Zahlen sind, nicht aber auf diejenigen, wo beyde Glieder besondere Größen sind; und weil nach ihr das geom. Verhältniß mit der Division verwirret werde, von der es doch schon deßwegen unterschieden sey, weil die Glieder des Verhältnisses gleichartig seyn müssen, welches beym Divisor und Dividende der Fall nicht sey ꝛc. Inzwischen finden wir die Gründe des Hrn. Schulz eben nicht so erheblich, um die obige Erklärung des geom. Verhältnisses zu verlassen. Denn wenn auch 1) beyde Glieder besondere Größen sind, z. B. zwey Linien, zwey Flächen ꝛc.; so ist doch auch von diesen das Verhältniß nur in so fern bestimmbar, in wie fern man sie in Zahlen (als den allgemeinen Repräsentanten aller Größen, wie sich Hr. Mellin in seinem encyclopädischen Wörterbuche der kritischen Philosophie im Artikel Analogie Nro. 5. ausdrückt)

Dort ist das mathematische Verhältniß das arithmetische; hier aber das geometrische. Sonach ist das arithmetische Verhältniß die Vergleichung zweyer Größen in Hinsicht

drückt) darstellt, z. B. durch die geometrische Messung bestimmt, daß die eine Linie 6 Schuhe, die andere aber nur 3 Schuhe lang sey, mithin das Verhältniß der letzten zur ersten dasselbe sey, welches zwischen 3 Schuhen und 6 Schuhen statt findet. Und wenn nun 2) das eine durch Zahlen dargestellte Glied des Verhältnisses durch das andere, gleichmäßig in Zahlen dargestellte, und mit dem ersten gleichartige Glied dividiret wird: so hat hier der Umstand, daß der Divisor eine benannte Größe ist, auf die Division selbst gar keinen Einfluß; vielmehr braucht man bloß die Zahl, welche jene benannte Größe darstellt, zum Divisor, gerade so, als wäre sie eine bloße oder unbekannte Zahl, dergleichen der Divisor überhaupt seyn muß, (57). Aehnliche Reflexionen lassen sich allen übrigen Gründen des Hrn. Schulz entgegen stellen, durch die er die obige Erklärung des geometr. Verhältnisses, so wie die alte Erklärung der Division „a durch b dividiren heißt so viel, als finden, wie vielmahl der Divisor b im Dividende a enthalten sey" für fehlerhaft erklärt. Uebrigens behaupten wir durch obige Erklärung nur so viel, daß zur Bestimmung des Exponenten des geometrischen Verhältnisses die Division des einen Gliedes durch das andere, als eine bloße Zahlgröße betrachtet, diene; welche Behauptung nicht einerley mit dieser ist „das geometrische Verhältniß, und die Division sind identische Begriffe" wo wir dann alle weitere Einwendungen, die Hr. Schulz dagegen macht, als uns nicht treffende auf sich hier beruhen lassen können.

sicht auf ihre Differenz; das geometrische aber die Vergleichung zweyer Größen in Hinsicht auf die Zahl, welche anzeigt, wie oft und wie die eine Größe in der andern enthalten ist. Die Differenz = d, und den Quotus = q nennen wir überhaupt die Exponenten mathematischer Verhältnisse, weil nur durch sie erklärt (exponiret) wird, nach was für einer von den zweyangeführten, und einzig möglichen Arten, Größen aus einander zu erzeugen, die eine Größe b als erzeugbar aus der anderen a betrachtet werde *). Inzwischen wird, wenn von mathematischen Verhältnissen schlechthin (d. i. ohne den

Beys-

---

*) Andere Mathematiker nennen überhaupt das, was einer Größe zukömmt, in wie fern sie mit einer andern in Verhältniß gesetzt wird, z. B. daß sie um so viel größer, oder kleiner sey, als die andere, oder daß sie so oft und so genommen, wie oft und wie die Einheit in einer gewissen anderen Größe steckt, der zweyten Größe gleich sey, den Namen des Verhältnisses (Nomen rationis), und heißen nun diesen Namen bey arithmetischen Verhältnissen die Differenz, bey geometrischen aber den Exponens. Z. B. Hr. Wucherer in seinen Anfangsgründen der Arithmetik ꝛc. §. 202. Hr. Schulz dagegen nennt die Differenz den Namen des arithmetischen Verhältnisses, und braucht das Wort Exponens nur beym geometrischen Verhältnisse. (l. c. §. 149. 156.)

Beysatz „arithmetisch“) die Rede ist, immer nach der Manier der Alten das geometrische Verhältniß verstanden, weil nur durch dieses die Quantität der Größen (3) bestimmt wird, welche das eigentliche Object der Mathesis ist. Denn zur Bestimmung der Quantität einer Größe wird erfordert, daß man angebe, wie oft und wie eine andere mit ihr gleichartige Größe, als Einheit betrachtet, zu sich selbst addirt werden müsse, um die gegebene Größe zu erzeugen. Dieses geschieht nun stets durch das geometrische Verhältniß, indem hier auf die Größe = q gesehen wird, mit welcher die Größe a multiplicirt werden muß, um die Größe b zu erzeugen. Dagegen wird beym arithmetischen Verhältnisse nur auf die Differenz der Größen a und b gesehen, welche zu der Größe a addirt, oder davon subtrahirt das Quantum b gibt, wo dann die Quantität der Größe b unbestimmt gelassen wird. Denn zu dieser Bestimmung ist die Multiplication nothwendig, während dem das arithmetische Verhältniß ganz auf Subtraction beruhet, weßwegen es auch von vielen durch das zwischen die zwey Glieder a und b gesetzte Subtractionszeichen — ausgedrückt wird. In-

zwischen kann man dasselbe gleichmäßig, wie das geometrische, durch zwey zwischen die Glieder a und b gesetzte Puncte ausdrücken; nur daß dann besonders angemerkt werden muß, daß man ein arithmetisches Verhältniß verstanden wissen wolle; weil man sonst, aus dem oben angegebenen Grunde, stets das geometrische versteht.

225. Aufgabe. Eine Formel für das arithmetische Verhältniß zu finden.

Auflösung, sammt Beweis. Wird das arithmetische Verhältniß durch a : b, und die Differenz durch d ausgedrückt: so ist b entweder $> a$, oder $< a$, oder $= a$. Ist $b > a$; so ist $b = a + d$; ist $b < a$; so ist $b = a - d$, und ist $b = a$, so ist $d = 0$, mithin ist allgemein $b = a \pm d$, d. i. das Consequens ist stets gleich dem Antecedens, mehr oder weniger der Differenz. Folglich ist nun die Formel des arithmetischen Verhältnisses überhaupt diese; $a : a \pm d$.

226. Erklärung. Mathematische Verhältnisse sind gleich, wenn sie gleiche Exponenten haben. Z. B. die zwey Verhältnisse 2 : 4, 6 : 8 sind zwey gleiche arithmetische, wegen derselben Differenz $= 2$; und 2 : 4, 6 : 12 sind zwey gleiche geometrische, wegen desselben Quotus $= 2$.

227.

227. Erklärung. Die Gleichheit zweyer mathematischen Verhältnisse heißt Proportion *) und sie wird durch das zwischen die zwey gleiche Verhältnisse gesetzte Gleichheitszeichen ausgedrückt. Sie ist eine arithmetische Proportion, wenn die gleichen Verhältnisse arithmetische sind, im Gegentheile eine geometrische. Z. B. 2 : 4 = 8 : 10 ist eine arithmetische Proportion, und der Sinn derselben ist: um wie viel kleiner das Antecedens des ersten Verhältnisses als das Consequens desselben ist, um eben so viel kleiner ist auch das Antecedens

des

---

*) Die Proportion heißt auch mathematische Analogie. Unter Analogie überhaupt nämlich versteht man die Einerleyheit zweyer Verhältnisse; und je nachdem diese entweder qualitative, oder quantitative sind (222), so ist auch die Analogie entweder qualitativ (z. B. Wie sich der zweckmäßig aufgeführte Bau des Menschen zur Vernunft des Menschen verhält, eben so verhält sich der zweckmäßig angelegte Bau des Bibers zu x, d. i. zu etwas im Biber, was ihn eben so in den Stand setzt, ein regelmäßiges Gebäude aufzuführen, wie dazu der Mensch durch seine Vernunft fähig ist) oder quantitativ (z. B. 1 Elle Tuch verhält sich zu 6 Ellen, wie 3 Thaler zu 18 Thaler). Die qualitative Analogie heißt nun Analogie schlechthin, und die quantitative oder mathematische wird Proportion genannt.

des zweyten Verhältnisses, als das Consequens desselben; und umgekehrt bey dieser 8 : 4 = 12 : 8, um wie viel größer das Antecedens des ersten Verhältnisses als das Consequens desselben ist, um eben so viel größer ist auch das Antecedens des zweyten Verhältnisses, als das Consequens desselben. Eben so ist 4 : 8 = 12 : 24 eine geometrische Proportion, und der Sinn derselben ist, wie oft und wie das Antecedens des ersten Verhältnisses in dem Consequens enthalten ist, eben so oft und so ist auch das Antecedens des zweyten Verhältnisses in seinem Consequens enthalten; kürzer wird dieses durch den Satz vorgetragen: 4 verhält sich zu 8, wie 12 zu 24.

228. Erklärung. Die Proportion, sowohl die arithmetische als geometrische, ist entweder eine discrete, oder stätige (continua), je nachdem der zweyte Terminus vom dritten entweder verschieden, oder mit ihm einerley ist. Der Ausdruck der arithmetisch stätigen ist z. B. $\frac{\cdot}{\cdot}$ 2 : 4 : 6, der geometrisch stätigen aber z. B. $\div$ 2 : 4 : 8.

229. Aufgabe. Eine Formel für die arithmetische Proportion zu finden.

Auflösung und Beweis. Jede discrete arith-

arithmetische Proportion kann durch a : c = b : e vorgestellt werden, wenn für beyde Verhältnisse dieselbe Differenz = d gesetzt wird. Nun ist c = a ± d und e = b ± d (225), also geht (per subſtitutionem) jener Ausdruck der arithmetischen discreten Proportion in diesen ganz allgemeinen über. a : a ± d = b : b ± d, und dieser ist sonach die Formel der arithm. discreten Proportion. Eben so kann die stätige arithmetische Proportion durch ÷ a : b : c vorgestellt werden, wenn wieder dieselbe Differenz = d gesetzt wird. Da nun b = a ± d, und c = b ± d = a ± d ± d = a ± 2d; so geht der erste Ausdruck ÷ a : b : c (per subſtitutionem) in die Formel über ÷ a : a ± d : a ± 2d.

230. Lehrsatz. In jeder discreten arithmetischen Proportion ist die Summe der äusseren Glieder gleich der Summe der mittleren, und in der stätigen dem mittleren Terminus doppelt genommen.

Beweis. In der Formel der discreten arithmet. Proportion a : a ± d = b : b ± d (229) ist augenfällig die Summe der äusseren Glieder a . + b ± d = a ± d + b, d. i. gleich

der

der Summe der mittleren. Gleichmäßig ist in $\dot{-}$ a : a $\pm$ d : a $\pm$ 2 d augenfällig 2 a $\pm$ 2 d $=$ (a $\pm$ d) . 2

231. Aufgabe. Zu drey Terminen a, b, c den vierten arithmetisch proportionalen zu finden.

Aufl. und Beweis. Nach der Bedingung der Aufgabe ist a : b $=$ c : x, mithin a + x $=$ b + c (230) folglich x $=$ b + c — a.

232. Aufg. Zu zwey Terminen a, b den mittleren arithmetisch proportionalen zu finden.

Auflösung. Es ist nach der Angabe $\dot{-}$ a : x : b, mithin a + b $=$ 2 x (230), folglich $x = \frac{a + b}{2}$ Z. B. ein Landgut hat für das erste Jahr 6000 fl., und für das zweyte 8000 fl. eingetragen; es fragt sich, wie groß der mittlere Ertrag desselben sey? Aufl. $x = \frac{14000}{2}$ $=$ 7000 fl. — Wären aber die Ertragssummen für mehrere Jahre gegeben, z. B. fürs erste Jahr 6000 fl., fürs zweyte 8000, fürs dritte 7000 fl. ꝛc., und man fragte, welches der mittlere Ertrag sey: so muß man alle jene Ertragssummen addiren,

diren, und die herauskommende Summe durch die Zahl der Jahre dividiren.

Dritter Theil.

Von geometrischen Verhältnissen und Proportionen.

233. Aufgabe. Eine Formel für das geometrische Verhältniß zu finden.

Auflösung. Man drücke das geometrische Verhältniß aus durch a : b, und der Exponens $\frac{b}{a}$ sey $= q$. Da nun, wenn $\frac{b}{a} = q$, $b = aq$ ist: so geht jener Ausdruck a : b in diesen allgemeinen über a : aq, welcher anzeigt, daß jedes Hinterglied gleich sey dem Vorderglied mit dem Exponens multipliciret.

234. **Erklärung.** Das geometrische Verhältniß ist 1) entweder ein Verhältniß der Gleichheit (ratio aequalitatis), wenn das Vorderglied a = dem Hintergliede b; oder ein Verhältniß der Ungleichheit, wenn a entweder $>$ oder $<$ b (ratio vel majoris, vel minoris inaequalitatis). 2) entweder ein einfaches, oder zusammengesetztes, je nachdem es entweder nicht in mehrere auflösbar ist, oder das Gegentheil statt findet. Das zusammengesetzte entsteht,

wenn

wenn die Vorderglieder mehrerer Verhältnisse unter sich, und auch die Hinterglieder derselben unter sich multipliciret werden. Z. B. Aus den Verhältnissen $\left\{\begin{matrix} a:b \\ c:m \\ d:n \end{matrix}\right\}$ entsteht das zusammengesetzte acd : bmn, dessen Exponens

$$= \frac{bmn}{acd} = \frac{b}{a} \times \frac{m}{c} \times \frac{n}{d}$$

235. Erklärung. Sind die einzelnen Verhältnisse, aus denen das Zusammengesetzte besteht, einander gleich (226): so ist ein jedes ein aliquoter Theil des Zusammengesetzten, und dieses das Vielfache desselben (ratio unius ex iis multiplicata), und zwar entweder das zweyfache (ratio duplicata), oder dreyfache (triplicata), überhaupt das nfache (ratio n^{ties} multiplicata). Z. B. $a^3 : b^3$ ist das dreyfache des Verhältnisses a : b, und a : b ist das subtriplicirte Verhältniß respectiv auf $a^3 : b^3$. — Dagegen ist 3a : 3b das dreyfache Verhältniß a : b und a : b ist die ratio subtripla respectiv auf 3a : 3b. Die Ausdrücke also: „das nfache eines Verhältnisses, und das nfache Verhältniß" müssen wohl von einander unterschieden werden.

236. Aufgabe. Eine Formel für die geometrische Proportion zu finden.

Auflösung. Jede discrete geometrische Proportion (228) kann ausgedrückt werden durch $a:c = b:d$, wenn beyderseits der nämliche Exponens $= q$ gesetzt wird. Nun ist $c = aq$, und $d = bq$ (233): also ist die Formel der discreten geom. Proportion diese; $a:aq = b:bq$. Eben so kann jede stätige geom. Proportion ausgedrückt werden durch $\dddot{=}\ a:b:c$ unter der Voraussetzung des nämlichen Exponens $= q$. Nun ist $b = aq$, und $c = bq = aq^2$, also ist die Formel der stätigen geometrischen Proportion diese $\dddot{=}\ a:aq:aq^2$.

237. Zusatz. 1. Da $a:b = am:bm$ (wegen des nämlichen Exponenten $\frac{b}{a}$): so verhalten sich die einfachen Größen eben so zu einander, wie die gleichvielfachen.

Ferner; da $a:b = \frac{a}{n} : \frac{b}{n}$ (wegen desselben Exponenten $\frac{b}{a}$); so verhalten sich die ganze eben so zu einander, wie die ähnlichen Theile derselben. Mithin wird ein

Verhältniß auf den kleinsten Ausdruck gebracht, wenn man das Vorder- und Hinterglied durch das größte gemeinschaftliche Maaß beyder dividiret, z. B. $161 : 207 = 7 : 9$. Eben so $ax^3 : bx^2 = ax : b$

238. Zusatz 2. Zwey Brüche von einerley Nenner verhalten sich zu einander, wie ihre Zähler. Denn es ist $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = a : b$ wegen des nämlichen Exponenten $= \frac{b}{a}$.

239. Erklärung. Die Glieder (Termini) einer Proportion sind **umgekehrt** (inverse s. reciproce) proportional, oder stehen im **umgekehrten Verhältnisse** (in ratione reciproca s. inversa), wenn sich das Vorderglied des ersten Verhältnisses zu dem Hintergliede desselben, wie das Hinterglied des zweyten Verhältnisses sich zu dem Vordergliede desselben verhält. Z. B. wenn die 4 Glieder einer Proportion sind: $\frac{a}{m}$, $\frac{a}{n}$, m, n: so verhält sich nicht $\frac{a}{m}$ zu $\frac{a}{n}$, wie m zu n, sondern wie n zu m,

weil

weil nur in dieser Proportion $\frac{a}{m} : \frac{a}{n} = n : m$

der nämliche Exponens $= \frac{m}{n}$ für beyde Verhältnisse statt findet, sonach nur diese Proportion eine wahre ist; mithin stehen die Glieder

$\frac{a}{m}$, $\frac{a}{n}$ im umgekehrten Verhältnisse zu m und n.

Dagegen sind die Glieder der Proportion direct proportional, wenn sich das Antecedens des zweyten Verhältnisses eben so zu seinem Consequens, wie das Antecedens des ersten sich zu seinem Consequens verhält. Z. B. die Glieder $\frac{a}{m}$ und $\frac{b}{m}$ sind den Gliedern a und b direct proportional, weil $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = a : b$ wegen des in beyden Verhältnissen statt findenden nämlichen Exponenten $= \frac{b}{a}$ eine wahre Proportion ist.

240. Zusatz. 1) Also stehen zwey Brüche vom nämlichen Nenner im directen Verhältnisse ihrer Zähler (238); und zwey Brüche

vom nämlichen Zähler sind im umgekehrten Verhältnisse ihrer Nenner (239).

241. Zusatz. 2) Die umgekehrte Proportion wird in eine directe verwandelt, wenn man entweder die Glieder des einen Verhältnisses versetzt, oder diese Glieder zu Nennern von Brüchen macht, deren Zähler = 1. Z. B. Aus

$\frac{a}{m} : \frac{a}{n} = m : n$ machet entweder $\frac{a}{m} : \frac{a}{n} = n : m$ oder $\frac{a}{m} : \frac{a}{n} = \frac{1}{m} : \frac{1}{n}$ Denn sowohl von $n : m$, als von $\frac{1}{m} : \frac{1}{n}$ ist der Exponens $= \frac{m}{n}$ der auch für das erste Verhältniß gilt.

242. Lehrsatz. In der discreten geometrischen Proportion ist das Product aus den beyden äussern Gliedern gleich dem Producte der beyden mittleren, und in der stätigen dem Quadrate des mittleren Gliedes.

Beweis. Für die discrete geometrische Proportion gilt die Formel $a : aq = b : bq$ (236) wo evident $abq = aqb$: und für die stätige die Formel $\therefore a : aq : aq^2$ (236), wo wieder $a \times aq^2 = (aq)^2 = a^2q^2$.

243.

243. Aufgabe. Zu drey Terminen a, b, c den 4ten geometrisch proportionalen $= x$ zu finden.

Auflös. und Beweis. Nach der Angabe ist $a : b = c : x$, mithin nach dem Lehrsatze (242):

$ax = bc$, und folglich $x = \frac{bc}{a}$.

244. Zusatz. Um also den 4ten geometrisch proportionalen Terminus zu drey gegebenen zu finden; muß man den dritten mit dem zweyten multipliciren, und das Product durch den ersten dividiren. — (Duc ternum in medium, productum divide primo) — welche Regel wegen ihrer großen Nützlichkeit im gemeinen Leben den Namen der goldenen Regel (Regulae aureae) erhalten hat. Im untergesetzten Anhange wird von derselben noch besonders gehandelt werden.

245. Aufgabe. Zu zwey Terminen a, b den mittleren geometrisch proportionalen zu finden.

Auflösung und Beweis. Nach der Bedingung der Aufgabe ist: $\therefore a : x : b$, mithin nach dem Lehrsatze (242) $ab = x^2$ mithin $x = \sqrt{ab}$; wo sonach ab ein vollkommenes

Quadrat seyn muß, um das x genau finden zu können.

246. Aufgabe. Zu zwey Terminen a, b den dritten geom. proportionalen zu finden.

Auflösung und Beweis. Nach der Angabe ist ∴ a : b : x, also nach dem Lehrsatze (242) $ax = b^2$, mithin $x = \frac{b^2}{a}$.

247. Lehrsatz. Sind zwey Producte gleich: so sind ihre Factoren umgekehrt proportional, d. i. wenn ab = cd; so ist a : c = d : b

Beweis. Wenn ab = cd; so ist auch $\frac{ab}{a} = \frac{cd}{a}$, und folglich auch $\frac{ab}{ad} = \frac{cd}{ad}$ d. i. $\frac{b}{d} = \frac{c}{a}$ d. i. die Exponenten der Verhältnisse a : c, d : b sind unter der angenommenen Bedingung gleich; mithin ist auch unter eben dieser Bedingung a : c = d : b eine wahre Proportion (227).

248. Zusatz. 1. Also kann jede Gleichung in eine Proportion aufgelöst werden. Z. B.

aus

aus $x^2 = b$ wird $x : 1 = b : x$, und aus $a^2 - x^2 = c$ wird $a + x : 1 = c : a - x$ ꝛc., so wie jede Proportion nach dem Lehrsatze (242) in eine Gleichung verwandelt werden kann.

249. Zusatz. 2. Wenn vier Termini a, b, c, d so stehen, daß das Product aus den beyden äusseren $= ad$ gleich ist dem Producte aus den beyden mittleren $= bc$: so sind sie unter sich proportional. Denn wenn $ad = bc$; so ist $a : b = c : d$ nach dem Lehrsatze (247).

250. Zusatz. 3. Wenn zwey Brüche gleich sind, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; so verhalten sich 1) die Zähler zu einander, wie die Nenner 2) der Zähler des ersten zu seinem Nenner, wie der Zähler des zweyten zu seinem Nenner, 3) der Nenner des ersten zum Zähler desselben, wie der Nenner des zweyten zum Zähler desselben. Denn wenn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; so ist auch $ad = bc$, mithin nach dem Lehrsatze (247) 1) $a : c = b : d$, 2) $a : b = c : d$, 3) $b : a = d : c$.

251. Aufgabe. Einen Bruch $= \frac{a}{b}$ in einen anderen zu verwandeln, der

ihm gleich, und dessen Nenner = m gegeben sey.

Auflösung. Nach der Bedingung der Aufgabe ist $\frac{a}{b} = \frac{x}{m}$, mithin nach dem Zusatze (250): b:a = m:x, folglich $x = \frac{am}{b}$. Z.B. $\frac{3}{4}$ fl. in Kreuzer aufzulösen. — Da 1 fl. = 60 kr.: so ist $\frac{3}{4}$ fl. = $\frac{x}{60}$ mithin 4:3 = 60:x, also $x = \frac{180}{4} = 45$ kr. Zur Erleichterung des hier nothwendigen multiplicirens und dividirens dient die Anwendung des folgenden Lehrsatzes.

252. Lehrsatz. Jede geometrische Proportion kann, der Proportionalität unbeschadet, verschieden verändert werden, wie beyliegendes Schema zeigt.

	a : aq : = b : bq	
Verwandlungs-arten.	Neue Proportionen.	Expo-nent.
1) alternando.	a : b = aq : bq	$\frac{b}{a}$
2) invertendo	aq : a = bq : b	$\frac{1}{q}$
3) componendo	a + aq : aq = b + bq : bq oder a + aq : a = b + bq : b	$\frac{q}{1+q}$ $\frac{1}{1+q}$
4) subtrahendo	a — aq : aq = b — bq : bq oder a — aq : a = b — bq : b	$\frac{q}{1-q}$ $\frac{1}{1-q}$
5) convertendo	a : a + aq = b : b + bq oder a : a — aq = b : b — bq	1 + q 1 — q

6) multiplicando (cf. 237)	$am : amq = b : bq$ oder $a : aq = bm : bmq$ oder $am : aq = bm : bq$ oder $a : amq = b : bmq$	q q $\frac{q}{m}$ mq
7) dividendo (cf. 237)	$\frac{a}{m} : \frac{aq}{m} = b : bq$ oder $\frac{a}{m} : aq = \frac{b}{m} : bq$ oder $a : \frac{aq}{m} = b : \frac{bq}{m}$	q mq $\frac{q}{m}$
8) ad potentiam ejusdem gradus elevando	$a^n : a^n q^n = b^n : b^n q^n$	q^n
9) Radicem ejusdem gradus extrahendo.	$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{aq} = \sqrt[n]{b} : \sqrt[n]{bq}$	$\sqrt[n]{q}$

Beweis. In allen diesen Verwandlungen bleibt immer derselbe Exponent für beyde Verhältnisse; sonach eine wahre Proportion.

253. Lehrsatz. Werden mehrere Proportionen componirt, so entsteht wieder eine Proportion.

Beweis

Beweis. Der Proportionen seyen vorerst nicht mehr als zwey, nämlich I) $a : m = n : w$, II) $r : s = c : e$; so ist $\frac{m}{a} = \frac{w}{n}$, und $\frac{s}{r} = \frac{e}{c}$ mithin auch $\frac{ms}{ar} = \frac{ew}{cn}$ (32. IV. vergl. 42), folglich $ar : ms = cn : ew$ (250): sind nun der Proportionen noch so viele; so erhellet die Wahrheit des Lehrsatzes gleichmäßig, wenn man die aus der Composition der beyden ersten entstandene Proportion mit der dritten componiret, und die daraus entstandene mit der vierten u. s. w. — Eben so zeigt sich die Wahrheit des folgenden Satzes.

254. Lehrsatz. Werden zwey oder mehrere Proportionen durcheinander dividirt: so entsteht wieder eine Proportion.

Beweis. Es seyen die Proportionen I) $a : m = n : w$, II) $r : s = c : e$; so ist dort $\frac{m}{a} = \frac{w}{n}$, und hier $\frac{s}{r} = \frac{e}{c}$, mithin auch $mn = aw$, und $sc = er$, folglich auch $\frac{mn}{sc} = \frac{aw}{er}$ (32. V. vergl. 52), sonach $\frac{a}{r} : \frac{m}{s} = \frac{n}{c} : \frac{w}{e}$

(247). Sind nun der Proportionen noch so viele; so dividiret die aus der Division der ersten durch die zweyte erhaltene Proportion durch die dritte u. s. w., und die Wahrheit des Lehrsatzes ist augenfällig.

255. Zusatz. 1. Sind die Terminen, a, b, c, d, ꝛc. den Terminen e, f, g, h ꝛc. entweder nach dieser Form proportional $\left\{\begin{matrix} a:b = e:f \\ b:c = f:g \\ c:d = g:h \end{matrix}\right\}$ oder nach dieser $\left\{\begin{matrix} a:b = g:h \\ b:c = f:g \\ c:d = e:f \end{matrix}\right\}$: so ist (componendo) sowohl dort (ex aequo ordinatim), als hier (ex aequo perturbate) $a:d = e:h$.

256. Zusatz. 2. Da $\div\div a:b:c = a:b =$ $b:c = \left(\begin{matrix} a:b = a:b \\ a:b = b:c \end{matrix}\right)$; und nun (componendo) $a^2:b^2 = a:c$; so folgt, daß, wenn drey Terminen stätig proportional sind, das Quadrat des ersten sich zum Quadrate des zweyten verhalte, wie der erste zum dritten. Eben so, wenn $\div\div a:b:c:d$; ist $a^3:b^3 = a:d$ ꝛc. Denn wenn $\div\div a:b:c:d$; so ist auch $\left\{\begin{matrix} a:b = a:b \\ a:b = b:c \\ a:b = c:d \end{matrix}\right\}$, mithin $a^3:b^3 = a:d$.

257.

257. Lehrsatz. Sind mehrere geom. Verhältnisse gleich, so verhält sich die Summe oder Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder, wie ein jedes Vorderglied zu dem Hintergliede desselben Verhältnisses.

Beweis. Es sey $a:b = c:d = m:n$ &c.: so ist vorerst in Rücksicht der zwey ersten gleichen Verhältnisse (alternando) $a:c = b:d$, mithin (componendo und subtrahendo) $a \pm c : a = b \pm d : b$, folglich (alternando) $a \pm c : b \pm d = a:b = c:d$. Da nun $c:d = m:n$ (ex hypothesi): so ist auch $a \pm c : b \pm d = m:n$, mithin (alternando) $a \pm c : m = b \pm d : n$ und nun (componendo et subtrahendo) $a \pm c \pm m = b \pm d \pm n : n$, folglich (alternando) $a \pm c \pm m : b \pm d \pm n = m : n = c : d = a : b$. Wären noch mehrere gleiche Verhältnisse gegeben; so würde die Demonstration auf die nämliche Weise fortgehen.

Anhang

Anhang
von der goldenen Regel insbesondere.

258. Erklärung. Die goldene Regel ist die Regel, eine unbekannte Größe zu finden, welche zu anderen gegebenen Größen geometrisch proportional ist. Diese Regel heißt in Rücksicht auf drey Terminen a, b, c, zu denen der 4te direct proportionale Terminus zu finden ist; „Multipliciret den dritten von den drey gegebenen Terminen mit dem zweyten, und dividiret das Factum durch den ersten" (243). Ist aber der 4te zu findende Terminus zu den 3 gegebenen umgekehrt proportional (239), was sich durch Reflexion über die vorgelegte Aufgabe leicht einsehen läßt, wie aus der untergesetzten Anmerkung erhellet: so heißt die Regel: „Multipliciret den dritten mit dem ersten und dividiret das Product durch den zweyten" (ducternum in primum et factum divide secundo): allein, da die indirecte Proportion sich sogleich in eine directe verwandeln läßt (241); so ist diese zweyte Regel entbehrlich, und mithin unter der Regula aurea nur die in dem ersten Satze vorgetragene Regel zu verstehen.

An-

Anmerkung.

1) Sind zwey Größen a, und b so miteinander verbunden, daß das nfache von a auch das nfache von b, und der nte Theil von a auch den nten Theil von b gibt: so stehen die Termini a, an, b, bn, wie auch a, $\frac{a}{n}$, b, $\frac{b}{n}$ in einer directen Proportion: Denn die Proportionen I) a: an = b: bn, II) a: $\frac{a}{n}$ = b: $\frac{b}{n}$ sind evident directe.

2) Sind aber zwey Termini a und b in einem solchen Verhältnisse, daß dem nfachen von a nur der nte Theil von b, oder dem nten Theile von a das nfache von b entspricht: so sind die 4 Termini a, an, b, $\frac{b}{n}$, wie auch a, $\frac{a}{n}$ b, bn indirect proportional, da nur a: an = $\frac{b}{n}$: b und a: $\frac{a}{n}$ = bn: b directe Proportionen sind.

3) Sind zwey Gröſſen a und b von der Art, daß weder das nfache von a das nfache von b weder der nte Theil von a den nten Theil von b, noch das nfache von a den nten Theil

von

von b, ꝛc. giebt: so findet gar keine Proportion statt. Unter den ersten Fall gehören z. B. a) fast alle Waaren, und ihre Preise. Die Edelgesteine betreffend: so machen diese eine Ausnahme. Denn der Preis derselben „richtet sich nicht nach ihrem Gewichte selbst, sondern nach einem größeren Verhältniß. Bey den Diamanten gilt die Regel, daß sich der Preis wie das Quadrat des Gewichts verhalte, oder das Verhältniß der Preise ist gleich dem gedoppelten Verhältnisse des Gewichts. Dieselben werden nun nach einem Gewicht, welches ein Karath genennt wird, und vier Gran hält, gewogen. Wenn nun ein Diamant von einem Karath zwey Rubel gilt, so wird ein Diamant von 100 Karath so vielmahl mehr gelten als das Quadrat von 100 größer ist, wie das Quadrat von 1." * Vollständige Anleitung zur Algebra von Hrn. Leonhard Euler I. Thl. §. 502.

b) Ursachen, und Wirkungen, wenn dieselbe Zeit, und Resistenz gesezt wird.

c) Die Reductionen gezählter Größen von der höheren Art auf Größen von der niederen Art. Unter den zweyten aber z. B. die Kräfte, und Zeiten, wenn die nämliche Wirkung gesezt

ſetzt wird; dann die Längen, und Breiten z. B. der Tücher, die zum nämlichen Zwecke gebraucht werden. Ein Beyſpiel des dritten Falls liefert die Frage, wenn aus einem Faſſe in 1″ 6 Maße ausfließen, wie viele Maaße fließen in 4″ aus? eben ſo die Frage: „wenn 2 Pferde in 1 Stunde 5 Stunden zurücklegen, wie viele Stunden machen ſie innerhalb 2 Stunden?

259. Erklärung. Die goldene Regel heißt die einfache (Regula aurea ſimplex), wenn man ſie nur einmal anzuwenden braucht, um die verlangte Proportionalgröße zu finden. Da nun dieſes der Fall iſt, ſo oft nur zu drey Terminen der 4te proportionale geſucht wird: ſo heißt ſie in dieſem Falle eigentlich die Regula de tri (ex tribus datis quartum proportionalem inveniendi). Muß ſie dagegen mehrmals angewendet werden, um die unbekannte, zu den gegebenen Terminen proportionale Größe zu finden: ſo heißt ſie die zuſammengeſetzte goldene Regel; und zwar entweder Regula aurea duplex, oder triplex, quadruplex ꝛc. überhaupt multiplex, je nachdem ſie entweder zwey, oder drey, oder viermahl ꝛc. anzuwenden iſt. Die zweymahlige Anwen-

dung ist nothwendig, wenn zu 5 Terminen der 6te; die dreymahlige; wenn zu 7 Terminen der 8te, die viermahlige, wenn zu 9 Terminen der 10te ꝛc. zu finden ist. Daher heißt die Regula duplex auch Regula de quinque, die triplex auch Regula de septem ꝛc.

Anmerkung.

Die Zahl der gegebenen Terminen muß allzeit ungerade seyn. Denn um ein Verhältniß zu bilden, müßen allzeit zwey Terminen mit einander verglichen werden. Wäre nun die Zahl der gegebenen Terminen eine gerade: so würde, wenn man je zwey und zwey derselben in Verhältniß sezt, zulezt keiner mehr übrig seyn, mit dem man die unbekannte in Verhältniß sezen könnte; was doch geschehen muß, um sie finden zu können.

260. Aufgabe. Die Aufgaben über die goldene Regel zu lösen.

Auflösung. I. Regel. Stellet die homologen Terminen in der Proportion zusammen, z. B. Preise zu Preisen, Gewichte zu Gewichten, Zeiten zu Zeiten, Kräfte zu Kräften ꝛc.

II. Regel. Ueberleget nach der Anmerkung

zu

zu der Erklärung (258), ob die angesetzte Proportion eine directe, oder umgekehrte ist, d. i. ob, wenn das Consequens des ersten Verhältnisses größer oder kleiner ist, als das Antecedens; auch das Consequens des zweyten Verhältnisses größer, oder kleiner werden müsse, als sein Antecedens; oder ob das Gegentheil statt finde. Im letzteren Falle verwandelt sofort die umgekehrte Proportion in eine directe.

III. Regel. Die homologen Terminen bringet auf dieselbe Benennung. Z. B. wenn die Zeiten Stunden und Minuten sind, so verwandelt entweder die Stunden in Minuten, oder die Minuten in Stunden.

IV. Regel. Bringet durch Anwendung des Lehrsatzes (252) die Terminen der Proportion auf den kleinstmöglichen Ausdruck. Z B. aus 24 : 12 = 18 : x machet 2 : 1 = 18 : x dann alternando: 2 : 18 = 1 : x und dividendo: 1 : 9 = 1 : x, wo x = 9.

V. Regel. Ist die vorgelegte Aufgabe eine Aufgabe über die zusammengesetzte goldene Regel: so verfahret nach der Anleitung der untergesetzten Beyspiele:

Beyspiele über die einfache goldene Regel.

I. Aufgabe. 40 Ellen Tuch kosten 260 fl.: wie viel kostet 1 Elle desselben Tuchs?

Auflösung. 40 : 1 = 260 : x.; alternando : 40 : 260 = 1 : x, dividendo : 2 : 13 = 1 : x, daher $x = \frac{13}{2} = 6\frac{1}{2}$ fl.

II. Aufgabe. 3 Pfund Gewürz kosten 12 fl., wie viel kosten 5 Unzen desselben Gewürzes?

Auflösung. Da 1 Pf. = 16 Unzen; mithin 3 Pf. = 16 × 3 = 48 Unzen: so ist 48 : 5 = 12 : x, alternando; 48 : 12 = 5 : x, dividendo; 4 : 1 = 5 : x, daher $x = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$ fl.

III. Aufgabe. 6 Arbeiter bringen einen Graben innerhalb 4 Tägen zu Stande: in wie viel Tägen werden 9 Arbeiter, die gleich fleißig sind, denselben Graben auf demselben Boden zu Stande bringen?

Auflösung. 6 : 9 = 4 : x. Da nun dieses eine indirecte Proportion ist: so machet daraus 6 : 9 = x : 4 oder 2 : 3 = x : 4, daher $x = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$.

IV. Aufgabe. Von einem $\frac{11}{4}$ breiten Tuche braucht Jemand 5 Ellen zum Rocke, wie viel

viel Ellen von einem $\frac{7}{4}$ breiten Futtertuche brauche er dazu?

Auflösung. $\frac{11}{4} : \frac{7}{4} = 5 : x$. Da nun diese Proportion eine indirecte ist: so machet daraus $\frac{11}{4} : \frac{7}{4} = x : 5$, mithin $\frac{55}{4} = \frac{7x}{4}$, woraus $x = 7\frac{6}{7}$ gefunden wird.

V. Aufgabe. Ein Brunnen gibt aus 3 Röhren Wasser. Die Ite Röhre allein füllt den n eimerigen Behälter in a Stunden. Die IIte allein in b Stunden, und die IIIte allein in c Stunden. Es fragt sich, in wie viel Stunden wird der Behälter voll, wenn die Ite und IIte, oder die Ite und IIIte, oder die IIte und IIIte, oder die drey Röhren zusammen hineinfließen?

Auflösung. Die Zeit, innerhalb welcher die Ite und IIte Röhre zusammen den Behälter füllen, sey $= x$. Um die Quantität Wassers zu finden, welches während dieser Zeit sowohl die Ite als IIte Röhre gibt, stellet die Proportionen an $a : x = n : y$, wo $y = \frac{nx}{a}$; und $b : x = n : z$, wo $z = \frac{nx}{b}$. Nun ist $\frac{nx}{a} + \frac{nx}{b} = n$; folglich $x = \frac{ab}{a+b}$. Eben so findet man die Zeit, binnen

nen welcher die Ite und IIIte den Behälter füllen $= x = \frac{ac}{a+c}$, und für die IIte und IIIte $= x = \frac{bc}{b+c}$, endlich für die drey Röhren zusammen $= x = \frac{abc}{ab+ac+bc}$.

261. Aufgabe. Die Richtigkeit des für x gefundenen Werthes zu prüfen.

Auflösung. Wenn der gefundene Werth in die zugehörige und richtig angestellte Proportion passet, so ist er richtig gefunden. Der Beweis erhellet von selbst.

262. Aufgabe. Ein Ganzes $= S$ nach gegebenen Verhältnissen z. B. a:b:c:d &c. in ungleiche Theile x, v, y, z &c. zu theilen.

Auflösung. Es ist $S = x + v + y + z$ &c., mithin $x = S - v - y - z$. Da nun nach der Annahme $x:v:y:z = a:b:c:d$, mithin 1) $x:v = a:b$, sonach $v = \frac{bx}{a}$, 2) $x:y = a:c$, (255) sonach $y = \frac{cx}{a}$, 3) $x:z = a:d$, sonach $z = \frac{dx}{a}$: so ist durch Substitution $x =$

S —

$S - v - y - z = S - \frac{bx}{a} - \frac{cx}{a} - \frac{dx}{a} =$

$S - \frac{bx - cx - dx}{a}$, folglich $ax = aS - bx -$

$cx - dx$, und nun $ax + bx + cx + dx = aS$

mithin $x = \frac{aS}{a+b+c+d} = S \cdot \frac{a}{a+b+c+d}$

Setzt man $a + b + c + d$ ꝛc. $= n$: so ist $x = S \cdot \frac{a}{n}$. Durch ähnlichen Calcul wird $v = S \cdot \frac{b}{n}$

$y = S \cdot \frac{c}{n}$, und $z = S \cdot \frac{d}{n}$

Beweis. Die gefundenen Werthe für x, v, y, z verhalten sich wirklich, $= a : b : c : d$ ꝛc.; denn es ist $\frac{aS}{n} : \frac{bS}{n} = a : b$ wegen des nämlichen Exponenten $\frac{b}{a}$; eben so ist $\frac{bS}{n} : \frac{cS}{n} = b : c$ ꝛc.

263. Zusatz. Da

$nx = aS$, mithin $n : S = a : x$, und

$nv = bS$, mithin $n : S = b : v$,

$ny = cS$, mithin $n : S = c : y$,

$nz = dS$, mithin $n : S = d : z$ ꝛc.:

so ergibt sich für die Auflösung aller unter obige (262) Aufgabe gehörigen Fälle die allgemeine Regel: Suchet zur Summe der Termi-

nen der gegebenen Verhältnisse, zum Ganzen, das zu theilen ist, und zu jedem einzelnen Terminus der gegebenen Verhältnisse den 4ten Proportionalterminns; dann ist das Ganze so getheilt, wie es verlangt wurde.

Diese Regel heißt insbesondere a) Repartitionsregel, wenn ein Ganzes unter mehrere nach gewissen Verhältnissen zu theilen ist; und hatten diese Mehrere vorher unter sich eine Gesellschaft errichtet, um ein gewisses Geschäft so zu machen, daß der ganze Gewinn nachher unter sie nach dem Verhältnisse ihrer Beyschüsse getheilt würde: so heißt sie Gesellschaftsregel (Regula societatis) b) Vermischungsregel, wenn die Verhältnisse der Ingredienzen, durch deren Mischung ein Ding entsteht, bestimmt sind, und die Frage ist, wie viel von einem jeden genommen werden müsse, um durch die Mischung eine gewisse Quantität zu erzeugen.

Beyspiele.

1) Aufgabe. Drey Kaufleute haben eine Summe = 20000 fl. zusammen geschossen. Der Beytrag des ersten war = 10000, des zweyten

7000,

= 7000, des dritten = 3000. Der gemeinschaftliche Gewinn = 6500 fl. Es fragt sich, welches ist der Antheil des ersten = x, des zweyten = y, des dritten = z am Gewinne.

Auflösung. Nach der Aufgabe (262) ist $x = S.\frac{a}{n} = S.\frac{a}{a+b+c} = 6500 \times \frac{10000}{20000}$

$= \frac{6500}{2} = 3250$, $y = S.\frac{b}{n} = 6500 \times \frac{7000}{20000}$

$= \frac{45500}{20} = 2275$, und $z = S.\frac{c}{n} =$

$6500 \times \frac{3000}{20000} = \frac{19500}{20} = 975$ fl. * Wollte man die Regel (263) hier ausdrücklich anwenden: so würden die Proportionen seyn 20000 :

$$6500 = \left\{\begin{matrix} 10000 \\ 7000 \\ 3000 \end{matrix}\right\} : \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix},$$

wo für x, y, z die nämlichen Werthe gefunden werden. Der Beweis der Richtigkeit der einzelnen Werthe ist alsdann aber nicht der, daß sie zusammen genommen den ganzen Gewinn geben; sondern der, daß die einzelnen Werthe in ihre zugehörige Proportion passen. Denn wenn y um eben so viel vergrößert, als x zu klein angenommen würde, würde $x+y+z$ zwar noch immer = 6500

werden, und doch wären die Werthe für x und y unrichtig.

2) Aufgabe. Vier Kaufleute schießen ein Kapital zu 2200 fl. in einem Jahr zusammen. Der Beytrag des Ersten ist = 600 fl., des zweyten = 400, des dritten = 900, des vierten = 300. Aber der erste gibt seinen Beytrag 3, der andere 4, der dritte 2, der vierte 5 Jahre lang, daß also die Summe der Beyträge des ersten = 1800, des zweyten = 1600, des dritten = 1800, des vierten = 1500 fl., und nun das ganze Kapital = 6700 fl. ist. Damit gewinnen sie 5000 fl.: wie groß ist der Antheil eines jeden an diesem Gewinnste?

Auflösung. Es ist hier wieder $x = S.\frac{a}{n}$ $= 6700 . \frac{1800}{6700} = 1800$. Eben so wird $v = S.\frac{b}{n}$, $y = S.\frac{c}{n}$, $z = S.\frac{d}{n}$ gefunden.

3) Aufgabe. Das beste Schießpulver wird erhalten, wenn man Salpeter, Kohlen und Schwefel nach den Verhältnissen 16: 3: 2 mischt. Es fragt sich, wie viel von jeder Materie zu 100 Pf. solchen Pulvers genommen werden müsse?

Auflösung. Der Theil Salpeters sey = x, der Theil von Kohlen = y, vom Schwefel = z:

Dann ist $x = s \cdot \frac{a}{n} = 100 \cdot \frac{16}{21} = 76$ Pf. $6\frac{2}{21}$ Loth, $y = s \cdot \frac{b}{n} = 14$ Pf. $9\frac{1}{2}$ Loth, und $z = s \cdot \frac{c}{n} = 9$ Pf. $16\frac{16}{21}$ Loth.

264. Aufgabe. Wenn die Wirkungen durch E, e, die wirkenden Kräfte durch V, v, die Zeiten durch T, t, und der verschiedene Widerstand, den die Kräfte leiden, durch R, r vorgestellt werden; eine Formel für das Verhältniß der Wirkungen zu construiren.

Auflösung. Setzet 1) die nämliche Zeit = T, und die nämliche Resistenz = r, in und unter welcher zwey Kräfte V und v wirken: so erhellet von selbst, daß die Wirkungen im directen Verhältnisse zu den Kräften stehen, mithin $E : e = V : v$, folglich $e = \frac{Ev}{V}$. Setzet 2) die nämliche Kraft v, die in der Zeit T, und unter der Resistenz r vorhin die Wirkung $e = \frac{Ev}{V}$ hervorbrachte, und lasset sie nun unter

der

der nämlichen vorigen Resistenz = r durch verschiedene Zeiten T, t wirken: so erhellet wieder, daß ihre Wirkungen diesen Zeiten direct proportional seyen, mithin $\frac{Ev}{V} : e = T : t$; sonach

$e = \frac{Evt}{VT}$. 3) Setzet, es wirke die nämliche Kraft v, welche vorhin in der Zeit t, unter der Resistenz r die Wirkung $e = \frac{Evt}{VT}$ hervorbrachte; und auch die Zeit t, innerhalb welcher sie wirkt, sey die nämliche = t, aber die Resistenzen r und R seyen verschieden: so erhellet, daß die Wirkung $\frac{Evt}{VT}$ im Verhältnisse zu einer anderen Wirkung e, welche von der nämlichen Kraft v in der nämlichen Zeit t unter der Resistenz = R hervorgebracht wird, um so größer seyn müsse, je kleiner die Resistenz = r relativ auf R ist, mithin; $\frac{Evt}{VT} : e = r : R$, folglich $e = \frac{EvtR}{VTr}$, sonach $eVTr = EvtR$, mithin $E : e = VTr : vtR = \frac{VT}{R} : \frac{vt}{r}$. Sonach stehen überhaupt die Wirkungen im zusammengesetz-

ſetzten Verhältniſſe aus dem directen der Kräften, und Zeiten, und dem umgekehrten der Reſiſtenzen. Dieſes Geſetz wird durch Abkürzung ausgedrückt in der Formel $e = \frac{vt}{r}$, welche ſonach eine Proportion andeutet.

265. Zuſatz. 1. Setzt man in der vorigen Formel $R = r$: ſo iſt $E : e = VT : vt$, oder $e = vt$. Und nach dieſer Proportion werden nun diejenigen Aufgaben über die zuſammengeſetzte goldene Regel gelöſt, bey denen aus 5 Terminen der 6te proportionale x zu finden iſt, wenn ſich dieſe Terminen zu einander verhalten, wie E, e, V, v, T, t.

266. Zuſatz. 2. Werden nebſt den Hauptzeiten T, t noch beſtimmte Theile derſelben T, t angegeben, in welchen die Kräfte V, v unter gleichen Reſiſtenzen wirken: ſo iſt $E : e = VTT : vtt$. Z. B. wenn zwey Kräfte V, v unter dem nämlichen Widerſtande wirken, jedoch ſo, daß die Kraft V zwey Täge, und in jedem Tage 4 Stunden, die Kraft v aber 1 Tag, und in dieſem 6 Stunden wirkt; ſo verhalten ſich die Wirkungen beyder zu einander $= VTT : vtt$.

Wer-

Werden nun in dieser Proportion E : e = VTT : vtt 7 Terminen, z. B. E, V, T, T, v, t, t gegeben: so läßt sich der 8te, z. B. e, allzeit finden, und so liefert uns diese Proportion die Regel, die Aufgaben der Regula aurea de septem zu lösen.

267. Zusatz. 3. Werden nicht nur Hauptzeiten T, t, und bestimmte Theile derselben T, t; sondern auch von diesen Theilen wieder bestimmte Theile Γ, γ angegeben, in welchen die Kräfte V, v unter gleichen Resistenzen wirken: so ist E : e = VTTΓ : vttγ; z. B. wenn die Kraft V 3 Wochen = T, jede Woche 4 Täge = T, jeden Tag 5 Stunden = Γ wirkt; und ihre Wirkung = E: dagegen die Kraft v 2 Wochen, = t, jede Woche 3 Täge = t, jeden Tag 6 Stunden = γ wirkt; so ist E : e = VTTΓ : vttγ, vorausgesetzt, daß beyde Kräfte den nämlichen Widerstand zu überwinden haben. Wenn nun in dieser Proportion 9 Terminen gegeben sind: so läßt sich der 10te leicht finden, und so dient dieselbe zur Lösung der Aufgaben über die zusammengesetzte Regula aurea de novem. Gleichmäßig lassen sich Proportionen, als Formeln

für

für die Auflösung der Aufgaben über die Regula aurea de undecim ꝛc. construiren.

Beyspiele der zusammengesetzten goldenen Regel.

I. Aufgabe. Drey Soldaten bekommen in 7 Tägen 6 Pf. Fleisch: wie viele Pf. Fleisch bekommen 5 Soldaten in 15 Tägen?

Auflösung. Nach der Formel (265) E : e = VT : vt ist 6 : x = 21 : 75, wenn man 6 Pf. = E, 3 Soldaten = V, 7 Täge = T, 5 Soldaten = v, und 15 Täge = t setzt. Mithin ist 6 : 21 = x : 75 oder 2 : 7 = x : 75, und daher $x = \frac{150}{7} = 21\frac{3}{7}$.

Anmerkung.

Da in dieser Aufgabe 5 Terminen gegeben sind, und der 6te proportionale gesucht wird: so muß sie nach der Regula de quinque gelöst werden. Wollte man sie durch 2mahlige Anwendung der goldenen Regel lösen: so stellet die homologen Terminen folgender Weise unter einander

3 Sold.	7 Täge,	6 Pf. Fleisch
5,	15,	x,

und stellet nun folgende 2 Proportionen an. I)

wenn

wenn 3 Soldaten in 7 Tägen 6 Pf. Fleisch erhalten, wie viele Pf. Fleisch = y bekommen 5 Soldaten in 7 Tägen? II) 5 Soldaten bekommen in 7 Tägen y Pf. Fleisch: wie viele Pf. Fleisch = x bekommen sie in 15 Tägen. Die 2 Proportionen sind also: $\begin{pmatrix} 3 : 5 = 6 : y \\ 7 : 15 = y : x \end{pmatrix}$; beyde sind directe; mithin ist componendo $21 : 75 = 6y : yx = 6 : x$, oder $7 : 25 = 6 : x$, daher

$$x = \frac{150}{7} = 21\frac{3}{7}.$$

II. Aufgabe. 6 Weber, wenn sie 4 Wochen, jede Woche 5 Täge weben, verfertigen 60 Stück Tuch: wie viele Stück Tuch verfertigen 5 Weber innerhalb 5 Wochen, wenn sie jede Woche 6 Täge weben?

Auflösung. Es gilt hier die Formel $E : e = VTT : vtt$ (266): setzt man also $E = 60$, $V = 6$, $T = 4$, $T = 5$, $v = 5$, $t = 5$, $t = 6$: so ist $60 : x = 120 : 150 = 4 : 5$, mithin $60 : 4 = x : 5$, oder $15 : 1 = x : 5$, und $x = 75$.

Anmerkung.

Wollte man diese Aufgabe, bey der aus 7 Terminen der proportionale 8te gesucht wird, auf dem Wege der dreymahligen Anwendung der gol-

denen

denen Regel lösen, so würden die Termini folgender Weise unter einander gestellt,

6 Weber, 4 Wochen, 5 Täge, 60 Stück Tuch,
5 , 5 , 6 , x

und nun folgende drey directe Proportionen angestellt werden müssen

I) 6 : 5 = 60 : y
II) 4 : 5 = y : z
III) 5 : 6 = z : x

woraus (componendo) die Proportion erhalten wird: 120 : 150 = 60 yz : yzx = 60 : x, wo wieder x = 75 ist.

III. Aufgabe. 6 Weber, wenn sie 5 Monathe, jeden Monath 3 Wochen, jede Woche 4 Täge, jeden Tag 6 Stunden weben, verfertigen 40 Stück Tuch von $\frac{11}{4}$ Breite: wie viel Stück Tuch von $\frac{9}{4}$ Breite verfertigen 4 Weber, wenn sie 3 Monathe, jeden Monath 2 Wochen, jede Woche 5 Täge, jeden Tag 3 Stunden weben?

Auflösung. Setzt man die verschiedenen Breite für verschiedene Resistenzen, mithin $\frac{11}{4}$ = R, $\frac{9}{4}$ = r, ferner 6 Weber = V, 5 Monathe = T, 3 Wochen = *T*, 4 Täge = Γ, 6 Stunden = W, 40 Stück = E; 4 Weber = v, 3 Monathe = t, 2 Wochen = *t*, 5 Täge = γ, 3 Stun-

den = w: so läßt sich leicht die Proportion zu

Stande bringen $E : e = \frac{VTT\Gamma W}{R} : \frac{vtt\gamma w}{r}$,

woraus auf dem kürzesten Wege durch Substitution $e = x = 8\,\frac{4}{27}$ eben so erhalten wird, als wenn man nach gehöriger Untereinanderschreibung der Terminen:

Weber, Monathe, Wochen, Täge, Stund., Stück, Breite,

6, 5, 3, 4, 6, 40, $\frac{11}{4}$

4, 3, 2, 5, 3, x, $\frac{9}{4}$

folgende Proportionen anstellt;

I) $6 : 4 = 40 : \mu$

II) $5 : 3 = \mu : \nu$

III) $3 : 2 = \nu : w$

IV) $4 : 5 = w : y$

V) $6 : 3 = y : z$

VI) $\frac{11}{4} : \frac{9}{4} = z : x$, oder durch Verwandlung der letzten indirecten Proportion in eine directe; $\frac{9}{4} : \frac{11}{4} = z : x$, und nun componendo die Proportion erhält:

$$\frac{6 \times 5 \times 3 \times 4 \times 6 \times 9}{4} : \frac{4 \times 3 \times 2 \times 5 \times 3 \times 11}{4}$$

$= 40 : x$, woraus $x = 8\,\frac{4}{27}$ hervorgeht.

268. Erklärung. Sind mehrere gezählte Grö-

Größen in solchen unter einander geordneten Gleichungen gegeben; daß immer die absolute Größe auf der 2ten Seite der vorhergehenden Gleichung wieder auf der ersten Seite der nächstfolgenden Gleichung vorkömmt; so heißen diese Gleichungen kettenförmige. Z. B. die absoluten Größen seyen A, B, C, D, E ꝛc., so ist das Schema der kettenförmigen Gleichungen

$$An = Bm$$
$$Bp = Cg$$
$$Cr = Dq$$
$$Dt = Es \text{ ꝛc.}$$

woraus sich eben so viele kettenförmig geordnete Proportionen ergeben,

$$A : B = m : n$$
$$B : C = g : p$$
$$C : D = q : r$$
$$D : E = s : t$$

welche componendo in diese übergehen $A : E = mgqs : nprt$, woraus $Anprt = Emgqs$ eben so erhalten wird, als wenn man die Seiten jener Gleichungen unter einander multipliciret, und die neue Gleichung durch BCD dividiret.

Z. B.

I. Aufgabe. Wie viel fl. rhn. kosten 13 Eimer Wein, wenn 3 Eimer = 17 fl. fr., und 4 fl. fr. = 5 fl. rhn.?

Auflösung. Setzet

x fl. rhn.? = 13 Eimer Wein

3 Eimer Wein = 17 fl. fr.

4 fl. fr. = 5 fl. rhn.

und es ist nach dem vorhergehenden 12 x fl. rhn. $= 1105$ fl. rhn., mithin $x = \frac{1105}{12} = 92\ \frac{1}{12}$ fl. rhn.

II. Aufgabe. Wie viel Ducaten machen 1000 Rubel, wenn 2 Rubel = 95 Stüver, 20 Stüver = 1 fl. holländ., 5 fl. holländ. = 2 Bco Thlr., 100 Bco Thaler = 142 Rthlr., 17 Rthlr. = 6 Ducaten?

Auflösung. Setzet

x Ducaten? = 1000 Rubeln.

2 Rubeln = 95 Stüver

20 Stüver = 1 fl. holländ.

5 fl. holländ. = 2 Bco Thlr.

100 Bco Thlr. = 142 Rthlr.

17 Rthlr. = 6 Ducaten,

und multipliciret diese Gleichungen unter einander; so erhaltet ihr $x = 476\frac{2}{17}$ Ducaten.

* Die Zahlen auf beyden Seiten der Gleichungen können kleiner gemacht werden, wenn je zwey, davon die eine auf der einen, und die andere auf der anderen Seite der Gleichungen steht, einen gemeinschaftlichen Divisor haben, nach dem Zusatze (237).

Fünftes Kapitel.

Von den Progressionen.

I.

Von der arithmetischen Progression.

269. Erklärung. Jede fortgesetzte stätige Proportion heißt eine Progression. Da nun die Proportionen entweder arithmetische oder geometrische sind: so sind auch die Progressionen entweder arithmetische, oder geometrische. Beyde sind ferner entweder steigende, oder fallende, je nachdem die folgenden Glieder entweder größer, oder kleiner werden, als die vorausgehenden. Z. B. $\frac{1}{2}$ 1: 2:3:4:5... ist eine steigende arithmeti-

sche

sche, und ÷ 5 : 4 : 3 : 2 : 1 eine fallende arithmetische Progression. Eben so ist ∴ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 eine steigende, aber ∴ 32 : 16 : 8 : 4 : 2 eine fallende geometrische Progression.

270. Aufgabe. Eine Formel für die arithmetische Progression zu construiren.

Auflösung und Beweis. Es sey ÷ a : b : c : e : f ꝛc. eine arithmetische Progression, und der nämliche Exponent der stätig verbundenen Verhältnisse = d; da b = a ± d (225), folglich c = b ± d = a ± d ± d = a ± 2d, und e = c ± d = a ± 2d ± d = a ± 3d, und f = e ± d = a ± 3d ± d = a ± 4d ꝛc.: so ist die Formel der arithmetischen Progression: ÷ a : a ± d : a ± 2d : a ± 3d : a ± 4d ꝛc.

271. Zusatz. In dem allerersten Terminus kömmt die Differenz = d nicht vor. Jeder folgende Term nus aber ist gleich dem allerersten = a mehr, oder weniger der Differenz = d so oft genommen, als die um 1 verringerte Zahl der Terminen anzeigt. Wenn daher die Zahl der Terminen = n, und der letzte Terminus (d. i. jeder beliebige nach dem allerersten) = z gesetzt wird:

wird: so ist allgemein $z = a \pm (d\,(n-1) = a \pm dn \mp d$, in welcher Formel die oberen Zeichen für die steigende, die unteren aber für die fallende Progression gelten. Denn ist die Reihe steigend, so ist jeder folgende Terminus gleich dem allerersten, mehr der Differenz so oft genommen, als $n-1$ anzeigt, mithin $z = a + (d\,(n-1) = a + dn - d$. Ist sie aber fallend, so ist $z = a - (d\,(n-1) = a - dn + d$.

Anmerkung.

Daß in der arithmetischen Progression jeder zte Terminus $= a \pm (n-1)\,d$ sey: läßt sich mit größter Schärfe auch so demonstriren. Gesetzt, dieser Satz sey wahr für zwey auf einander folgende beliebige Terminen, z. B. den mten $= q$, und $(m+1)$ten $= r$: so ist er auch für den $(m+2)$ten $= s$, als den nächstfolgenden wahr: das ist, wenn $q = a \pm (d\,(m-1) = a \pm dm \mp d$ und $r = a \pm (d\,(m+1-1) = a \pm dm$: so ist auch $s = a \pm (d\,(m+2-1) = a \pm (d\,(m+1) = a \pm dm \pm d$. Denn da die Differenz in allen Verhältnissen der arithmetischen Progression dieselbe ist: so ist $r - q = s - r$, folglich $s = 2r - q$. Es war aber nach der An-

nahme $r = a \mp dm$, und $q = a \mp dm \mp d$; also ist durch Substitution $s = 2a \mp 2dm - a \mp dm \pm d = a \mp (d(m+2 - 1)$: Nun gilt jener Satz wirklich für den zweyten Terminus $= b$ und den dritten $= c$ (270): also ist obiger Satz auch wahr vom vierten Terminus d, mithin auch vom fünften, sechsten ꝛc., d. i. von jedem nten Terminus, der als der letzte z betrachtet wird. * Schulz Anfangsgründe der reinen Mathesis. §. 196. 197.

272. Zusatz. Da $z = a \mp dn \mp d$; mithin $a = z \mp dn \pm d = z \mp (d(n-1)$: so ist jeder Teeminus vor dem letzten, der als der Erste $= a$ betrachtet werden kann, gleich dem letzten weniger oder mehr der Differenz, so oft genommen, als die um 1 verringerte Zahl der Terminen anzeigt. Die oberen Zeichen gelten da wieder bey der steigenden, die unteren aber bey der fallenden Progression.

273. Lehrsatz. In der arithmetischen Progression ist, wenn die Zahl der Terminen gerade ist, die Summe der äussersten Glieder gleich der Summe jeder zwey beliebigen Terminen, die von den äussersten gleich weit abstehen:

ist

ist aber die Zahl der Terminen ungerade: so ist besagte Summe gleich dem mittleren Terminus, doppelt genommen.

Beweis. In der Progression ÷ a:b.. h..m...z, bey der die Zahl der Terminen gerad ist, seyen h und m zwey Terminen, welche gleichweit von den äußersten a und z entfernt stehen. Da nun h relativ auf a, als der letzte, und m relativ auf z als der erste gelten kann, mithin $h = a \pm dn \mp d$, und $m = z \mp dn \pm d$: so ist auch $h + m = a \pm dn \mp d + z \mp dn \pm d = a + z$, welches zuerst zu erweisen war. — Eben so ist in der Progression ÷ a:b...m.... z bey welcher die Zahl der Terminen ungerad ist, der mittlere m, als der letzte relativ auf a, und als der erste relativ auf z zu betrachten, mithin ist dort $m = a \pm dn \mp d$, und hier ist $m = z \mp dn \pm d$, folglich $2m = a \pm dn \mp d + z \mp dn \pm d = a + z$, welches das zweyte war.

274. Zusatz. Also ist der mittlere Terminus $m = \frac{a + z}{2}$.

275. Lehrsatz. Die Summe der Terminen der arithmetischen Progression

ist

ist dem halben Producte aus der Summe der äussersten Glieder in die Zahl der Terminen gleich.

Beweis. Ist die Zahl der Terminen gerad: so ist die Summula der äussersten gleich der Summula je zweyer Terminen, die gleichweit von den äussersten abstehen (273), und die Zahl solcher Summulen = der halben Zahl aller Terminen. Da nun die Summe aller Terminen gleich ist der Summe aller jener Summulen; jede solche Summula aber gleich ist der Summe der äußersten Terminen, mithin die Summe der Summulen gleich ist der Summe der äußersten, so oft genommen, als die Zahl der Summulen d. i. die halbe Zahl der Terminen anzeigt: so folgt, daß auch die Summe aller Terminen gleich sey der Summe der äußersten, so oft genommen, als die halbe Zahl der Terminen anzeigt, oder, was einerley ist, dem halben Producte aus der Summe der äußersten in die Zahl der Terminen. Mithin, wenn die gerade Zahl der Terminen = n, die Summe der äußersten = a + z, und die Summe aller Terminen = S gesetzt wird, ist für diesen Fall (wo n gerad ist) allgemein $S = \frac{(a + z)\ n}{2} = \frac{an + zn}{2}$.

Ist aber die Zahl der Terminen = n ungerad: so ist n — 1 d. i. die Zahl der Terminen, um 1 vermindert, (welches geschieht, wenn man einstweilen in Gedanken den mittleren = $\frac{a + z}{2}$ (270) wegläßt) eine gerade. Mithin ist dann nach dem ersten Falle $S = \frac{(a + z)(n - 1)}{2}$ $= \frac{an - a + zn - z}{2}$. Setzt man nun wieder zu dieser Summe den mittleren Terminus = $\frac{a + z}{2}$: so ist für den zweyten Fall: $S = \frac{an - a + zn - z + a + z}{2} = \frac{an + zn}{2} = \frac{(a + z)n}{2}$: folglich das Theorem ganz allgemein demonstrirt; oder es ist überhaupt $S = \frac{an + zn}{2}$

* Die Schärfe dieses Beweises verdanken wir Hrn. Hofrathe Kästner.

276. Aufgabe. Wenn von den fünf Terminen a, d, n, z, s, die in jeder arithmetischen Progression vorkommen, drey gegeben werden, die zwey andere zu finden.

Auf-

Auflösung. Die zwey gesuchte sind allezeit ableitbar aus den Formeln $z = a \pm dn \mp d$, und $S = \frac{an + zn}{2}$. Der Fälle aber, welche diese Aufgabe unter sich faßt, sind 10: nämlich wenn gegeben sind 1) a, d, n. 2) a, d, s. 3) a, d, z. 4) a, n, s. 5) a, n, z. 6) a, s, z. 7) d, n, s. 8) d, n, z. 9) d, s, z. 10) n, s, z. Hier nur ein einziges Beyspiel, da derselben mehrere in der IVten meiner sechs mathematischen Dissertationen vorkommen. Es sey $a = 50$, $d = 100\frac{1}{2}$, $s = 1807\frac{1}{2}$, n und z zu finden. Auflösung. $z = a \pm dn \mp d$ und $s = \frac{an + zn}{2}$.

Da nun die zwey Unbekannten in beyden Formeln vorkommen: so suchet aus der zweyten den Werth für z. Dieser ist: $z = \frac{2s - an}{n}$. Da nun auch $z = a \pm dn \mp d$: so ist $a \pm dn \mp d = \frac{2s - an}{n}$, mithin $an \pm dn^2 \mp dn = 2s - an$, mithin $\pm dn^2 + 2an \mp dn = 2s$, folglich $n^2 \frac{+2an \mp dn}{\pm d} = \frac{2s}{\pm d}$ oder $n^2 \pm \frac{2an}{d} - n = \frac{2s}{\pm d}$. Setzt man nun $\pm \frac{2a}{d} - 1 = p$: so

geht

geht die letzte Aequation in diese über: $n^2 + pn = \frac{2s}{\pm d}$ welche Gleichung eine unvollkommene vermischte quadratische ist. Macht man das Quadrat vollständig: so ist $n^2 + pn + \frac{p^2}{4} = \frac{2s}{\pm d} + \frac{p^2}{4}$, mithin $n + \frac{p}{2} = \pm V\left(\frac{2s}{\pm d} + \frac{p^2}{4}\right)$ folglich $n = -\frac{p}{2} \pm V\left(\frac{2s}{\pm d} + \frac{p^2}{4}\right)$. Durch Substitution ist nun, wenn man die Progression für eine steigende annimmt, mithin im Werthe für p, so wie in $\frac{2s}{\pm d}$ die oberen Zeichen gelten läßt, $n = \frac{1}{402} \pm V\left(\frac{5812921}{161604}\right) =$

$\frac{1}{402} \pm \frac{2411}{402} = 6$; folglich $z = a \pm dn \mp d$

$= 552\frac{1}{2}$, und die ganze Progression $= \div 50:$

$150\frac{1}{2}: 251: 351\frac{1}{2}: 452: 552\frac{1}{2}$.

II.

II.

Von der geometrischen Progression.

277. Aufgabe. Eine Formel für die geometrische Progression zu construiren.

Auflösung und Beweis. Es sey ∺ a:b:c:d:e.. eine geometrische Reihe, und der nämliche Exponens der Verhältnisse sey $= q$. Da $b = aq$ (233), mithin $c = bq = aq^2$, $d = cq = aq^3$, $e = dq = aq^4$ ꝛc. So ist die gesuchte Formel: ∺ $a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4$.

278. Zusatz. Im ersten Terminus $= a$ kömmt der Exponens $= q$ nicht vor; jeder folgende aber ist gleich dem ersten $= a$ multiplicirt mit derjenigen Potenz von q, welche die um eine Einheit verringerte Zahl der Terminen anzeigt. Setzt man daher den letzten (d. i. jeden nach a folgenden) Terminus $= z$, die Zahl der Terminen $= n$; so ist $z = aq^{n-1}$, mithin $a = \frac{z}{q^{n-1}}$ d. i. jeder vor dem letzten stehende Terminus ist gleich dem letzten, dividiret durch diejenige Potenz von q, welche die um 1 verminderte Zahl der Terminen (von z bis a) anzeigt.

Anmerkung.

Daß $z = aq^{n-1}$ sey; läßt sich wieder mit der größten Schärfe auch folgenderweise demonstriren. Gesetzt der in der Formel $z = aq^{n-1}$ ausgedrückte Satz sey wahr von zwey auf einander folgenden Terminen einer geometrischen Progression $\div$ a : b : c..., nämlich vom mten $= p$ und $(m+1)$ten Terminus $= r$; so ist er auch wahr vom nächstfolgenden $(m+2)$ten $= t$, d. i. wenn $p = aq^{m-1}$, und $r = aq^{m+1-1} = aq^m$; so ist auch $t = aq^{m+2-1} = aq^{m+1}$.

Denn vermöge der Gleichheit der Exponenten der einzelnen Verhältnisse ist $\frac{r}{p} = \frac{t}{r}$ mithin $t = \frac{r^2}{p}$. Nun ist nach der Annahme $p = aq^{m-1}$ und $r = aq^m$, mithin $t = \frac{a^2q^{2m}}{aq^{m-1}} = aq^{m+1}$. Es ist aber obiger Satz wirklich wahr in Rücksicht des zweyten Terminus $= b$, und des dritten $= c$ (277): also ist auch wahr vom vierten $= d$, sonach auch vom 5ten, 6ten ꝛc. überhaupt von jedem zten Terminus.

279. Zusatz. Ist in der Progression $\dot{\dot{-}}$ a ... m .. p ... z die Zahl der Terminen gerad, und stehen zwey Terminen m und p gleichweit von den äußersten a und z ab: so ist m, als der letzte relativ auf a betrachtet, $= aq^{n-1}$ und p, als der erste relativ auf z betrachtet, $= \frac{z}{q^{n-1}}$, mithin ist $mp = aq^{n-1} \times \frac{z}{q^{n-1}} =$ $= az$; das ist; das Product aus den äussersten Terminen ist gleich dem Producte aus je zweyen, gleichweit von den äussersten abstehenden Terminen.

Ist aber in der Progression $\dot{\dot{-}}$ a ... m ... z die Zahl der Terminen ungerad: so ist der mittlere m, als der letzte relativ auf a betrachtet, $= aq^{n-1}$, und als der erste relativ auf z, $= \frac{z}{q^{n-1}}$, mithin $m^2 = aq^{n-1} \times \frac{z}{q^{n-1}} =$ az, d. i. das Product aus den äußersten Terminen ist gleich dem Quadrate des mittleren.

280. Zusatz. Wenn $m^2 = az$ (279): so ist $z = \frac{m^2}{a}$, d. i. wenn ein Terminus der Progression als der mittlere betrachtet, und das

Qua-

Quadrat deſſelben durch den allererſten dividiret wird, ſo erhält man einen Terminus = z, welcher von m eben ſo weit, als m von a abſtehet. Hierauf gründet ſich die Methode, jeden verlangten Terminus einer gegebenen Progreſſion in der Kürze zu finden. Z. B. den 25ten in der Progreſſion ∴ 3 : 6 : 12 : 24 .... Hier iſt $\frac{24 \times 24}{3} = 3 \times 24 =$ 192 der 7te, und $\frac{192 \times 192}{3}$ $= 64 \times 192 =$ 12288 der 13te, und $\frac{12288 \times 12288}{3} = 4096 \times 12288 = 50331648$ der 25te. Hätte man etwa einen oder einige Terminen zu viel, oder zu wenig, auf dieſem Wege gefunden: ſo dividiret man dort den gefundenen letzten Terminus durch den Exponenten der Progreſſion ſo lange, bis man auf den verlangten kömmt: hier aber multipliciret man ihn eben ſo lange mit dem Exponens der Progreſſion.

281. Aufgabe. Eine Formel für die Summe aller Terminen der geometriſchen Progreſſion zu finden.

Auflöſung und Beweis. Setzt man die Summe aller Terminen = S; ſo iſt die Summe aller Vorderglieder = S — z, und die

Summe aller Hinterglieder $= S - a$. Nun ist $S - z : S - a = a : aq$ (257), sonach $Saq - zaq = Sa - a^2$, oder $Sq - zq = S - a$; daher $Sq - S = qz - a$, mithin $S = \frac{qz - a}{q - 1}$.

282. Aufgabe. Wenn von den 5 Termînen a, q, n, z, s, die in jeder geometrischen Progression vorkommen, drey gegeben sind, die zwey übrigen zu finden.

Auflösung. Diese Aufgabe umfaßt wie die obige (276) 10 Fälle, indem 5 Dinge nur 10 Verbindungen nach drey zulassen, nämlich 1) a, n, q. 2) a, n, s. 3) a, n, z. 4) a, q, s. 5) a, q, z. 6) a, s, z. 7) n, q, s. 8) n, q, z. 9) n, z, s. 10) q, s, z. Nimmt man von diesen Fällen den 2ten und 9ten, wie auch diejenigen aus, bey denen n gesucht wird: so sind die übrigen aus den Formeln für s und z nach den oben vorgetragenen Regeln der Elementar-Algebra lösbar: aber zur Lösung des Falles, wo n gesucht wird, dient allererst das nachfolgende Kapitel von den Logarithmen; und für die Lösung des 2ten und 9ten Falles langt die Elementar-Arithmetik,

sammt

sammt der Elementar-Algebra mit ihren Grundsätzen gar nicht zu. Denn in beyden Fällen kömmt man auf eine Gleichung vom nten vermischten Grade, ohne daß er ein quadratischer Grad ist. Die Lösung solcher Gleichungen aber liegt ausser dem Gebiethe der Elementar-Algebra. Daß sie aber auch nicht durch Logarithmen gelöst werden können, lehrt das Kapitel von den Logarithmen. (325. Anmerk.)

Anmerkung.

In dem vom Hrn. geh. Rathe J. M. Schneidt 1798 zu Würzburg herausgegebenen I. Hefte des so betitelten juristisch-mathematischen Magazins wird zwar (S. 70 und 76) eine Auflösung für die Fälle, wo a, n, s, oder n, z, s gegeben sind, aufgestellt: aber es fehlt ihr durchaus an derjenigen strengen Allgemeinheit, welche der Mathematiker fordert, wenn er für die Lösung einer Aufgabe eine Formel sucht; und in Rücksicht welcher strengen Allgemeinheit ich von jeher mit andern Mathematikern behauptet habe, daß die zwey obigen Fälle der Elementar-Algebra unauflöslich seyen; daher ich denn durch den angeführten Versuch

jene Behauptung nicht für widerlegt ansehen kann. In Rücksicht derjenigen Leser, welche jenes Heft nicht besitzen, will ich nur die allda versuchte Auflösung des Falles, wenn a, n, s gegeben sind, hier nach ihren Grundlinien einrücken, damit sie aus ihr auf den Gehalt der versuchten Auflösung des zweyten Falls, wenn n, z, s gegeben sind, schließen können. Die versuchte Auflösung ist folgende. „Die Formeln $aq^{n-1} = z$, $\frac{qz-a}{q-1} = S$, liefern die Formeln $aq^n = qz$, $qz - a = qs - s$, oder $qz = qs - s + a$. Daher $aq^n = qs - s + a$, mithin $q^n = \frac{qs-s+a}{a}$. Man nehme nun die Progression $\dddot{:}$ 3 : 12 : 48 : 192 : 768 : 3072, wo $a = 3$, $n = 6$, $s = 4095$: so stehet die Aequation also:

$$q^6 = \frac{4095q - 4095 + 3}{3} = 1365q - 1365 + 1$$

$= 1365q - 1364$. Diese Aequation ist auf verschiedene Art auflösbar ꝛc.“ Der Hr. Verfasser nimmt also, wo er auf die Gleichung $q^n = \frac{qs-s+a}{a}$ stößt, seine Zuflucht zu einer Progression (und das Nämliche geschieht

S.

S. 76—77 in Rücksicht der 2ten Aufgabe): da nun dieses nicht eine Lösung der Aufgabe in demjenigen Sinne heißen kann, in welchem der Mathematiker den Begriff der Auflösung nimmt, wenn er die genannten Aufgaben für der Elementar-Algebra unauflösliche erklärt: so erhellet, was vom ganzen Versuche zu halten sey. Der Hr. Verf. hätte zeigen sollen, wie der Werth von q in den Gleichungen $aq^n = qs - s + a$, oder $aq^n - qs = a - s$, und (rücksichtlich auf den 2ten Fall) $z = q^n z - sq^n + sq^{n-1}$ durch eine Formel nach Grundsätzen der Elementar-Algebra bestimmbar sey, was er aber sicher nie zu zeigen im Stande seyn wird.

Einige Beyspiele

1) Aufgabe. Ein Samenkorn treibe im ersten Jahre einen Halmen, in dessen Aehre nur 20 Körner seyen. Ein jedes dieser Körner trage im zweyten Jahre wieder 20 u.s.w. Es fragt sich, wie viele Körner im 12ten Jahre herauskommen.

Auflösung. Hier ist $a = 20$, $q = 20$, $n = 12$, mithin $z = aq^{n-11} = 20 . 20^{11} =$

20

$20 \cdot 20^5 \cdot 20^6 = 20 \cdot 3200000 \cdot 64000000 =$ 4096000000000000. Um sich nun die Vorstellung der Größe dieser Zahl zu erleichtern; so setze man, in einer jeden Secunde würden davon 2000 Körner fortgeworfen, und suche nach folgender Berechnung die Zahl der Jahre, die erforderlich sind, um durch unausgesetztes solches Fortwerfen den ganzen Haufen zu erschöpfen.

in 1″ werden fortgeworfen 2000 Körner,
also in 60″ = 1′ . . 2000 × 60 = 120000
also in 60′ = 1 Stunde .. 120000 × 60 = 7200000
also in 24 Stunden = 1 Tag . . 172800000
mithin in 365 Tägen = 1 Jahr . . 63072000000
mithin in 1000 Jahren . . 63″072000000000
mithin in 10000 Jahren . . 630″720000000000

welche Zahl der obigen noch nicht gleich ist, woraus denn die ungeheure Größe derselben einleuchtend ist.

2) Aufgabe. Einer verkauft sein Pferd nach den Hufnägeln, deren 24 sind. Für den ersten Nagel fordert er 1 Heller, für den zweyten 2 Heller, für den dritten 4 Heller, und immer für den folgenden zweymahl so viel, als für den vorhergehenden. Es fragt sich, wie hoch dieses Pferd verkauft worden?

Auflösung. Hier ist $a = 1$, $q = 2$, $n = 24$, mithin $z = aq^{n-1} = 2^{23} = 2^{20} \bowtie 2^3 = 1048576 \bowtie 8 = 8388608$, sonach $s = \frac{qz-a}{q-1} = 16777215$ Heller $= 4194303$, 75 Kreuzer $=$ 69905, 0625 fl.

3) Aufgabe. * Seffa Eben Dahir der Erfinder des Schachspiels verlangte von dem König Scheramo, daß ihm so viel Korn gegeben würde, als herauskömmt, wenn auf den ersten Flecken des Schachbretts 1 Korn, auf den andern 2, auf den dritten 4 und so weiter auf den folgenden allzeit nochmahl so viel als auf den vorhergehenden gelegt wird, wie viel machet nun die Summe aller dieser Körner?

Auflösung. Aus $S = \frac{qz-a}{q-1} = \frac{aq^n-a}{q-1}$ erhält man 18446744073709551615 Körner.

Anmerkung.

Ist n sehr groß: so wird die Erhebung des q zur nten oder $(n-1)$ten Potenz durch die Anwendung des Satzes erleichtert, daß $q^n \bowtie q^m = q^{m+n}$; wenn man eben nicht die Logarithmen

---

*) Jo. Bern. Wiedeburg's Einleitung zu den mathem. Wissenschaften. 2te Aufl. Jena 1735. S. 88.

men anwenden will, als durch welche, wie sichs in der Theorie der Logarithmen zeigen wird, der Werth für q^n, wenn q und n gegeben sind, sich auch sehr leicht finden läßt.

283. Erklärung. Eine Größe wächst unendlich (crescit in infinitum), wenn sie größer werden kann, als jede endliche Größe (quantitas finita), die sich angeben, oder mit bestimmten und gegebenen Größen von ihrer Art vergleichen läßt (quantitas in infinitum crescens quavis dabili, aut adsignabili major fieri potest). Da nun jede Größe größer werden kann, als jede angebliche: so folgt, daß man eigentlich nicht sagen könne, eine Größe sey unendlich groß (infinite magna, vel simpliciter infinita i. e. major omni dabili). Denn jede Größe, die ist, läßt sich angeben. Wenn man also doch diesen Ausdruck braucht, so stellt man sich gleichsam eine Grenze vor, der sich die Größe durch die beständige Vermehrung immer nähert, und nimmt diese Grenze statt der Größe in einem Zustande, den man für ihren letzten ansieht, ob es gleich wieder keinen solchen letzten gibt.

284. Zusatz. Also kann eine unendlich

große

große Größe größer, und zwar unendlichmahl größer seyn, als die andere; und die Mathematiker setzen daher mit Recht verschiedene Ordnungen der unendlichen Größen fest. Z. B. der 3te geometrisch proportionale Terminus zu 1, und ∞ ist $= \infty^2$, d. i. eine unendlich große Größe von der zweyten Ordnung, d. i. eine Größe, in welcher die unendlich große Größe von der ersten Ordnung $= \infty$ eben so unendlichmahl enthalten ist, wie die endliche Größe $= 1$ in der unendlich großen Größe von der ersten Ordnung.

285. Erklärung. Eine Größe nimmt unendlich ab (decrescit in infinitum) wenn sie kleiner werden kann, als jede endliche Größe, die sich angeben, oder mit bestimmten und gegebenen Größen von ihrer Art vergleichen läßt (quantitas in infinitum decrescens quavis dabili, aut assignabili minor fieri potest). Daß aber eine Größe unendlich abnehmen könne, zeigt der folgende Lehrsatz.

286. Lehrsatz. Wenn man von einer Größe a die Hälfte, und von dieser Hälfte wieder die Hälfte, und von dieser zweyten Hälfte (dem Viertheile) wieder die Hälfte u. s. w. nimmt; so ist es

allemahl möglich, eine Anzahl von Halbirungen zu bestimmen, durch die man auf eine Größe kömmt, die kleiner ist, als jede nach Gefallen angegebene Größe c.

Beweis. I. Vorbereitungssatz. Jede Potenz von 2 ist größer, als ihr Exponent. Denn gesetzt; es sey $r > 1$, und $2^r > r$: so ist erstens $2r > r+1$, und zweytens $2 \cdot 2^r > 2r$ d. i. $2^{r+1} > 2r$; mithin noch vielmehr $2^{r+1} > r+1$ d. i. wenn der Satz für die Potenz r der Zahl 2 wahr ist: so ist er auch für die nächstfolgende Potenz $r+1$ wahr. Nun fällt in die Augen, daß $2^1 > 1$; $2^2 > 2$; $2^3 > 3$ Mithin ist der Satz auch von der 4ten, 5ten u. s. w. von allen Potenzen der Zahl 2 wahr.

II. Beweis selbst. Man nehme an, daß sich c mit a vergleichen lasse, und daß also c etliche mahl genommen etwas größeres, als a werden könne: m sey eine solche ganze Zahl, die $mc > a$ macht; so ist $\frac{a}{2^m} < \frac{mc}{2^m}$; aber $m < 2^m$ (nach dem Vorbereitungssatze); folglich $\frac{mc}{2^m} < c$,

oder

oder $\frac{a}{2^m} < c$, das heißt, man kömmt durch m Halbirungen auf einen Theil von a, der kleiner ist, als c. * Dieser Beweis ist nebst den Erklärungen (283. 285. 287) aus Kästner's Anfangsgründen der Anal. endl. Größen. 2te Aufl. 45. 46. genommen, als welcher ihn zuerst aus Euclid's X. Elem. Prop. I. in sein mathem. Lesebuch eingerückt hat, weil er den wahren Grund der Schlüsse enthält, welche man jetzt, nach Kästner's Ausdruck, durch Ausdrückungen des unendlich Kleinen abzukürzen pflegt.

287. Zusatz. Bildet man sich, wenn eine Größe unendlich abnimmt, eine Grenze ihres Abnehmens ein, der sich die Größe durch ihre beständige Verminderung immer nähert, und nimmt man diese Grenze statt der Größe in einem Zustande, den man für ihren letzten ansieht, ob es gleich keinen solchen gibt; so sagt man, die Größe werde unendlich klein $= \frac{1}{\infty}$, oder sie verschwinde, und sey sonach, verglichen mit einer endlichen Größe von derselben Art, $= 0$.

288. Zusatz. Dem Begriffe von einer unendlich kleinen Größe zufolge kann man 1) eben

so

wenig eigentlich sagen, eine Größe sey wirklich unendlich klein (minor omni dabili), als man eigentlich sagen kann, sie sey unendlich groß. 2) Eine unendlich kleine Größe kann kleiner, ja unendlich kleiner werden, als eine andere, wie aus der Progression erhellet $\div\div 1 : \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2} : \frac{1}{\infty^3}$ ..... $\frac{1}{\infty^\infty}$, wo $\frac{1}{\infty}$ in 1 unendlichmahl eben so enthalten ist, wie $\frac{1}{\infty^2}$ (quantitas infinite parva secundi ordinis) in $\frac{1}{\infty}$ (in quantitate infinitesima primi ordinis) ꝛc.

289. Aufgabe. Eine Formel für die Summirung einer unendlich abnehmenden geom. Reihe zu finden.

Auflösung und Beweis. Wenn 1) alle Glieder positiv sind; wie in der Progression $\div\div a : aq : aq^2$ ..... $\frac{1}{\infty}$, wo q ein eigentlicher Bruch seyn muß, damit die Reihe eine abnehmende heißen könne: so ist die verlangte Formel

mel $S = \frac{a}{1-q}$. Denn es ist

$$S = a + aq + aq^2 + aq^3 \ldots\ldots \frac{1}{\infty},$$

mithin auch $Sq = . + aq + aq^2 + aq^3 \ldots\ldots \frac{1}{\infty}$,

folglich auch $S - Sq = a$ mithin $S = \frac{a}{1-q}$. Wech-

seln aber 2) die Glieder mit + und — ab, wie in

der Reihe:

$$\div a : -aq : +aq^2 : -aq^3 : +aq^4 \ldots\ldots \frac{1}{\infty}$$

wo q wieder ein eigentlicher Bruch seyn muß: so

ist $S = a - aq + aq^2 - aq^3 + aq^4 \ldots\ldots + \frac{1}{\infty}$:

mithin $Sq = . + aq - aq^2 + aq^3 - aq^4 \ldots\ldots - \frac{1}{\infty}$,

folglich $S + Sq = a$, und daher $S = \frac{a}{1+q}$.

Z. B. für $\div \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} \ldots\ldots$ ist $S = \frac{a}{1-q} =$

$\frac{1}{2} : (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} : \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{1} = 1$, das ist:

die Summe so vieler Glieder, als man auch zu-

sammenrechnet, ist zwar allemahl kleiner, als 1,

weil

weil z nicht in rigore = o; aber da z kleiner werden kann, als jede Größe, die sich angeben läßt (286), man folglich die Reihe so weit fortsetzen kann, daß die gefundenen Glieder zusammen addirt etwas geben, das von der Einheit um etwas geringeres, als jede Größe, die sich angeben läßt, unterschieden ist; so ist S = 1

*Kästner l. c. p. 48.

290. Zusatz. Ist die unendlich abnehmende Reihe von Brüchen von der Art, daß der Zähler sich gleich bleibt, die Nenner aber die natürlichen Potenzen des ersten Nenners sind: so ist die Summe gleich dem ersten Bruche, wenn der Nenner desselben um 1 vermindert wird. Denn für $\div \frac{b}{m} : \frac{b}{m^2} : \frac{b}{m^3} \ldots . \frac{b}{m^\infty}$ gilt die Formel

$$S = \frac{a}{1-q} \text{ (289)} = \frac{b}{m} : \left(1 - \frac{1}{m}\right) = \frac{b}{m} : \left(\frac{m-1}{m}\right) = \frac{b}{m} \times \frac{m}{m-1} = \frac{bm}{m^2 - m} = \frac{b}{m-1}.$$

Z. B. für $\div \frac{3}{4} : \frac{3}{16} : \frac{3}{64} \ldots .$ ist $S = \frac{3}{4-1} = 1$. Eben so ist für $\div \frac{1}{100} : \frac{1}{100^2} : \frac{1}{100^3} \ldots . S = \frac{1}{99}$.

Schluß.

Schlußanmerkungen.

1) Von dem Zusatze (290) läßt sich leicht die Anwendung machen I) bey dem Sophisma, womit der Eleatensische Zeno die Wirklichkeit der Bewegung bestritt. Es war folgendes: gäbe es in der Natur eine Bewegung: so würde das absurdum folgen, daß der schnellste Reiter Achill es die langsamste Schildkröte nie werde einhohlen können. Denn setzet, Achilles sey um eine Meile von der Schildkröte entfernt, und bewege sich hundertmahl geschwinder, als dieselbe: so würde, wenn Achilles die Meile zurücke gelegt hat, die Schilgkröte schon wieder den hundertsten Theil dieser Meile voraus seyn, und sonach Achill sie noch nicht eingehohlt haben. Während dem Achill diesen hundertsten Theil der Meile zurücke legt, bewegt sich die Schildkröte wieder um den hundertsten Theil dieses hundertsten Theils, d. i. um den $\frac{1}{10000}$-ten Theil einer Meile vorwärts u. s. w. ins unendliche fort: also hohlt Achill die Schildkröte nie ein. — Allein 1) folgt gerade daraus, daß Achill der Schildkröte immer näher kömmt, daß es eine Bewegung gebe; 2) bilden die Räume der Schildkröte die geometri-

sche Reihe $\frac{1}{100} : \frac{1}{100^2} : \frac{1}{100^3} \ldots\ldots$, deren Summa $= \frac{1}{99}$ (290) mithin wenn Achill $1\frac{1}{99}$ Meile zurück gelegt hat, hat er die Schildkröte erreicht, oder ist ihr so nahe, daß der noch Statt findende Abstand verschwindend $= \frac{1}{\infty} = 0$ ist. II. Bey der Aufgabe, Decimalbrüche, in denen entweder dieselbe Zifferzahl, oder dieselbe Periode von Zifferzahlen ohne Ende vorkömmt, in gemeine Brüche zu verwandeln. Z. B. $0{,}333333\ldots$ ist $= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} \ldots = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, eben so ist $0{,}636363\ldots = \frac{63}{100} + \frac{63}{100^2} + \frac{63}{100^3} \ldots = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$ und

$0{,}142857\,142857\,142857\ldots = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$

2) Unendlich wachsende geometrische Reihen lassen sich nicht summiren, indem in der Formel $s = \frac{qz - a}{q - 1}$ der Werth für z, mithin auch für qz unendlich groß wird, mithin nicht summiret werden kann.

Sechstes Kapitel.

Von den Logarithmen.

A.

Theorie der Logarithmen.

Durch die Verbindung der arithmetischen Progression mit der geometrischen entspringen die Logarithmen, wie aus dem folgenden Abschnitte erhellet. Dieses der Grund, warum jetzt von ihnen gehandelt wird.

291. Lehrsatz. Jede geometrische Progression, deren zweytes Glied $= a$, und erstes $= a^0 = 1$ gesetzt wird, enthält die natürlichen Potenzen von dem zweyten Gliede, und die Exponenten dieser Potenzen bilden eine arithmetische Reihe.

Beweis. Die Progression $\div a^0 : a^1 : a^2 : a^3 \ldots a^n : a^{n+1} : a^{n+2}$ &c. ist evident eine wahre geometrische Reihe, weil alle Verhältnisse den nämlichen Exponenten $= a$ haben. Eben so ist evident $\div 0 : 1 : 2 : 3 \ldots n : n+1 : n+2$ &c. eine wahre arithmetische Reihe, weil alle Verhältnisse zum Exponens die nämliche Differenz $= 1$ haben.

292. Lehrsatz. Jede geometrische Reihe, deren erstes Glied nicht = 1 ist, läßt sich in eine andere verwandeln, deren erstes Glied = 1 ist, und die mit der gegebenen den nämlichen Exponenten hat; und jede arithmetische Reihe, die nicht mit o anfängt, kann in eine andere verwandelt werden, die mit o anfängt, und der gegebenen in Ansehung der Differenz gleich ist.

Beweis I. Die Formel einer jeden geometrischen Reihe ist $\div$ a : aq : aq^2 : aq^3 .... aq^{n-1} : aq^n : aq^{n+1} : aq^{n+2} ... dividiret man nun alle Glieder durch a; so erhält man die Reihe $\div$ 1 : q : q^2 : q^3 .... q^{n-1} : q^n : q^{n+1} : q^{n+2}, wo derselbe Exponens = q, wie in der gegebenen Reihe, Statt findet. II. Die Formel einer jeden arithmetischen Reihe ist $\div$ a : a $\pm$ d : a $\pm$ 2d : a $\pm$ 3d .... zieht man nun von allen Terminen den ersten a ab; so erhält man die Reihe $\div$ o : $\pm$ d : $\pm$ 2d : $\pm$ 3d ... wo dieselbe Differenz $\pm$ d statt findet.

293. Lehrsatz. Jede Zahl kann als ein Verhältniß der Menge zur Einheit betrachtet werden.

Beweis. Jede Zahl ist eine Menge gleichartiger Einheiten; sonach durch die Einheit erzeugt, mithin als ein Verhältniß der Vielheit zur Einheit vorstellbar.

294. Zusatz. Also kann auch ein jeder Terminus in einer geometrischen Reihe als ein Verhältniß desselben Terminus zur Einheit vorgestellt werden. Z. B. in der Reihe ∴ 1 : 2 : 4 : 8 ... ist 8 = 1 : 8, 2 = 1 : 2 ꝛc. überhaupt a^m = 1 : a^m.

295. Erklärung. Dasjenige Verhältniß in der geometrischen Reihe, durch welches alle übrige bestimmt sind, ist das Grundverhältniß oder die Basis der ganzen Reihe. Z. B. in ∴ $a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : a^4$ ... ist $a^0 : a^1$ = 1 : a die Basis. Denn dieses Verhältniß einmahl angenommen, muß nothwendig das folgende seyn 1 : a^2 = a^2 ꝛc., weil sonst die Progression zernichtet würde.

296. Zusatz. Wird die Basis (295) geändert: so ändert sich die ganze Progression. Da nun die Basis unendlich mannigfaltig seyn kann: so sind auch selbst die geometrischen Progressionen unendlich mannigfaltig. Inzwischen lassen sie sich alle in solche verwandeln, die mit 1

anfangen (292), weßwegen wir im Verlaufe auch nur von solchen geometrischen Reihen sprechen werden, die mit 1 anfangen.

297. Erklärung. Schreibt man unter eine geometrische Reihe, deren Basis 1 : a ist, die Exponenten der einzelnen Glieder so, daß jeder Exponens unter das ihm entsprechende Glied der geometrischen Reihe zu stehen kommt: so bilden diese Exponenten eine arithmetische Reihe, deren Basis 0 : 1 ist (291), und zeigen an, wie viele Verhältnisse vom ersten Gliede der geometrischen Reihe bis auf dasjenige Glied einschlüssig statt finden, von dessen Exponens die Rede ist, oder, das wie vielfache des Grundverhältnisses dasjenige Verhältniß sey, von dessen Exponens die Rede ist (quotuplicata ratio Baseos sit quaevis ratio data progressionis). Z. B. wenn die zwey Reihen sind:

$$\begin{matrix} \vdots \\ \vdots \end{matrix} a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : a^4 : a^5 \ldots$$

$$\begin{matrix} \cdot \\ \cdot \end{matrix} 0 : 1 : 2 : 3 : 4 : 5 \ldots$$

so zeigt die Zahl 3 in der arithmetischen Reihe an, daß der Terminus $a^3 = 1 : a^3$ in der geometrischen Reihe das Dreyfache des Grundverhältnisses $1 : a$ sey, oder daß bis auf den Terminus a^3 drey gleiche geometrische Verhältnisse statt fin-

finden, und diese sind $1 : a^1$, $a^1 : a^2$, $a^2 : a^3$. Setzt man nun die Basis der geometrischen Reihe $a = 2, 4, 10$ &c. überhaupt > 1, damit aus ihrer Erhebung zu Potenzen andere Zahlen entstehen, die größer als 1 sind, so entstehen verschiedene geometrische Zifferreihen, denen allen eine und dieselbe arithmetische Reihe, deren Basis $0 : 1$ ist, correspondiret, als welche arithmetische Reihe von den Exponenten der Glieder jener geometrischen Reihen gebildet wird. Nämlich

I, $\div\div\ 2^0 : 2^1 : 2^2 : 2^3 : 2^4 : 2^5 \ldots$

$\div\ 0 : 1 : 2 : 3 : 4 : 5$.

II. $\div\div\ 4^0 : 4^1 : 4^2 : 4^3 : 4^4 : 4^5 \ldots$

$\div\ 0 : 1 : 2 : 3 : 4 : 5 \ldots$

III. $\div\div\ 10^0 : 10^1 : 10^2 : 10^3 : 10^4 : 10^5 \ldots$

$\div\ 0 : 1 : 2 : 3 : 4 : 5 \ldots$

In allen diesen Fällen haben die in der arithmetischen Reihe fortlaufenden Exponenten der geometrisch proportionalen Glieder dieselbe Bedeutung, wie oben; und werden deßwegen mit Recht Logarithmen, d. i. Verhältnißzahlen ($\lambda o \gamma \omega \nu\ \alpha \rho \iota \theta \mu o \iota$ — rationum numeri) genannt.

Sonach sind in Rücksicht auf geometrische Reihen, deren Basis $a^0 : a^1$ ist, und mit denen die arithmetische Reihe $\div\ 0 : 1 : 2 : 3 \ldots$ verbunden

wird, Logarithmen Zahlen, welche eine arithmetische Reihe bilden, und die Exponenten anderer Zahlen sind, welche in einer geometrischen Reihe stehen. So ist z. B. in der obigen arithmetischen Reihe die Zahl 4 der Logarithmus entweder von $10^4 = 10000$, oder von $4^4 = 256$, oder von $2^4 = 16$ ꝛc., d. i. die Zahl 4 zeigt an, daß die Zahl $10^4 = 10000 = 1 : 10000$ das Vierfache des Grundverhältnisses 1 : 10, und $4^4 = 256 =$ 1 : 256 das Vierfache der Basis 1 : 4, und $2^4 = 16 = 1 : 16$ das Vierfache der Basis 1 : 2 sey. Der kürzere Ausdruck dessen ist: $4 = l.\ 10^4 = l.\ 10000$, oder $4 = l.\ 4^4 = l.\ 256$, überhaupt $m = l.\ a^m$.

Anmerkung.

In Rücksicht auf andere mögliche arithmetische Reihen, deren Basis nicht 0 : 1 ist, und die doch auch mit der geometrischen Reihe $\dot{\dot{\dot{\dot{}}}}\ 1 : a : a^2 \ldots$ unter dem Namen der Logarithmen verbunden werden können, wie wir im Verlaufe sehen werden, geben die Mathematiker eine allgemeinere Definition von den Logarithmen, nämlich: Logarithmi sunt Numeri proportionales arithmetice,

metice, numeris geometrice proportionalibus applicati; ſeu Numeri aequalibus ſemper differentiis ſe excedentes, pro Numeris geometrice proportionalibus ſubſtituti. (Dechales curſus f. Mundus mathematicus T. I. p. 430. Edit. alt. Lugduni MDCLXXXX), oder Logarithmi ſunt numeri in progreſſione arithmetica procedentes, et reſpondentes aliis numeris in progreſſione geometrica progredientibus. (Trentel's Compendium algebrae elementaris §. 212). Den Grund dieſer allgemeineren Definition aber werden wir allererſt weiter unten anzeigen, wenn wir zuvor die Eigenſchaften der Logarithmen, in der oben (297) angeführten Bedeutung genommen, werden kennen gelernt haben.

298. Zuſatz. Sonach gilt von den ſo beſchriebenen Logarithmen genau alles das, was von den Exponenten derjenigen Zahlen in der geometriſchen Progreſſion gilt, deren Logarithmen ſie ſind. Setzt man alſo die geometriſche Reihe $= \div 1 : a : a^2 : a^3 : a^4 \ldots$, und betrachtet man nun die Zahlen b, c, d ꝛc. als erzeugt aus der Baſis a, ſo daß etwa $a^m = b$, $a^n = c$, $a^r = d$

ꝛc.: so sieht man leicht die Wahrheit folgender Sätze ein:

299. Lehrsatz. Der Logarithmus des Productes ist gleich der Summe der Logarithmen der Factoren.

Beweis. Wenn $b = a^m$, $c = a^n$, sonach $bc = a^{m+n}$: so ist $m = l.\ b$, $n = l.\ c$ und $m + n = l.\ bc$, mithin (per substitutionem) $l.\ b + l.\ c = l.\ bc$.

300. Lehrsatz. Der Logarithmus des Divisors abgezogen vom Logarithmus des Dividend's gibt den Logarithmus des Quotus.

Beweis. Wenn $b = a^m$, $c = a^n$, mithin $\frac{b}{c} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$: so ist $m = l.\ b$, $n = l.\ c$, $m - n = l.\ \frac{b}{c}$, mithin (per substitutionem) $l.\ b - l.\ c = l.\ \frac{b}{c}$.

301. Lehrsatz. Der Logarithmus des 4ten geometrisch proportionalen Terminus wird erhalten, wenn man von der Summe der Logarithmen der bey-

den A

den mittleren Glieder den Logarithmus des ersten Gliedes abzieht.

Beweis. Wenn $b : c = d : x$; so ist $x = \frac{cd}{b}$. Sind nun zwey Größen, die als aus einer und derselben Grundzahl a erzeugt betrachtet werden, einander gleich, so müssen auch ihre Exponenten oder Logarithmen einander gleich seyn. Denn setzet x sey $= a^v$, $\frac{dc}{b} = a^w$, so muß notbwendig, damit $a^v = a^w$ seyn könne, auch $v = w$ seyn. Mithin da $x = \frac{dc}{b}$; so ist auch

$$l.\, x = l.\, \frac{dc}{b} = l.\, d + l.\, c - l.\, b. \text{ (299. 300).}$$

302. Lehrsatz. Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Logarithmus der Wurzel, multipliret mit dem Exponenten der Potenz.

Beweis. Wenn die Wurzel $= b = a^m$, mithin die rte Potenz von $b = b^r = a^{mr}$: so ist $m = l.\, b$, $mr = l.\, b^r$, folglich (per substitutionem) $l.\, b \times r = l.\, b^r$.

303. Lehrsatz. Der Logarithmus einer Wurzel wird erhalten, wenn man

den Logarithmus der gegebenen Potenz dividirt durch den Exponens der verlangten Wurzel.

Beweis. Wenn die gegebene Potenz $= b = a^m$, mithin $m = l. b$: so ist auch $\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, folglich $\frac{m}{n} = l. \sqrt[n]{b}$, mithin (per substitutionem) $\frac{l. b}{n} = l. \sqrt[n]{b}$.

304. Zusatz. Sonach leisten die oben (297) beschriebenen Logarithmen den wichtigen Vortheil, daß man vermittelst ihrer die Multiplication durch eine einfache Addition, die Division durch eine einfache Subtraction, die Erhebung zu Potenzen durch die leichte Multiplication durch 2, 3 ꝛc., und die Ausziehung der Wurzeln durch die leichte Division durch 2, 3, 4 ꝛc. vollbringen kann.

Anmerkung.

Die Addition und Subtraction lassen sich durch Logarithmen nicht vollbringen. Denn wollte man statt der Addition $a^m + a^n =$ $b + c$ schreiben $l. b + l. c = l. a^m + l. a^n$: so wäre dieser Ausdruck ein Zeichen, daß b und c

unter

unter sich multipliciret seyen: eben so, wenn man die Subtraction der Zahl c von b durch l. b — l. c ausdrücken wollte, würde man anzeigen, daß b durch c dividiret sey. — Der letzte Grund liegt darin, weil auch die Addition der Größen a^m, a^n nicht durch Addition ihrer Exponenten, und die Subtraction derselben nicht durch Subtraction ihrer Exponenten geschehen kann. Inzwischen wenn man doch die Gleichung $a^m \pm b = x$ logarithmisch ausdrücken will; so muß man schreiben $l.(a^m \pm b) = l.x$

305. Lehrsatz. Auf eine ähnliche Weise (304) wird der Calcul beym Multipliciren, Dividiren ꝛc. erleichtert, wenn man auch andere arithmetische Reihen, die nicht mit o: 1 anfangen, als Logarithmen von Zahlen annimmt, die eine geometrische Reihe bilden.

Beweis. Setzet, wie in der Spalte A des beylie, genden Schema geschieht, die von $1 = a$ anfangende geometrische Reihe $\div$ a : b : c : d .... und in den Spalten B, C, D nach Belieben verschiedene arithmetische Reihen, wovon keine

A		B		C	D
a.	1	k.	1	2	1
b.	2	l.	2	4	4
c.	4	m.	3	6	7
d.	8	n.	4	8	10
e.	16	p.	5	10	13
f.	32	q.	6	12	16
g.	64	r.	7	14	19
h.	128	s.	8	16	22
i.	256	t.	9	18	25

mit o : 1 anfängt; jede aber durch ÷ k : l : m : n : p..... vorgestellt werde, und als Logarithmus der geometrischen Reihe in A gelte: so lassen sich folgende Lehrsätze leicht einsehen, von deren Wahrheit die Wahrheit des zu erweisenden Hauptlehrsatzes abhängt.

I. Lehrsatz. Der Logarithmus des zu 3 gegebenen Gliedern geometrisch proportionalen vierten Terminus wird erhalten, wenn man die Logarithmen der beyden mittleren Terminen addiret, und von dieser Summe den Logarithmus des ersten Terminus abzieht.

Beweis. Wenn die drey gegebenen Terminen der geometrischen Proportion sind c, e, f; so ist (ex hypothesi) c : e = f : x und dieser (ex hyp.) geometrischen Proportion correspondiret (ebenfalls ex hyp.) als Logarithmus derselben die arithmetische Proportion m : p = q : y, mithin ist y = l. x = p + q — m = l. e + l. f — l. c, was zu erweisen war. Z. B. wenn m = 3, p = 5, q = 6 genommen wird: so ist y = 5 + 6 — 3 = 8 = l. 128 = l. x mithin x = 128.

II. Lehrsatz. Der Logarithmus eines

nes

nes Productes wird erhalten, wenn man die Logarithmen der Factoren addiret, und davon den Logarithmus von 1 abzieht.

Beweis. Wählt man aus der geometrischen Reihe in A als Factoren die Terminen c und f, und setzt man das Product cf = x; so ist 1 : c = f : x eine geometrische Proportion, welcher, als Logarithmus derselben, diese arithmetische correspondiret; k : m = q : y; mithin ist y = l. x = m + q — k = l. c + l. f — l. 1, was zu erweisen war. * Ist l. 1 = 0, welches der Fall ist, wenn die arithmetische Reihe, die als Logarithmus der von 1 anfangenden geometrischen Reihe gilt, von 0 anfängt: so erhellet von selbst, daß dann der Logarithmus des Productes gleich sey der Summe der Logarithmen der Factoren, wie oben (299) gelehrt worden.

III. Lehrsatz. Der Logarithmus des Quotus wird erhalten, wenn man zum Logarithmus des Dividends den Logarithmus von 1 addiret, und von der Summe den Logarithmus des Divisors abzieht.

Beweis. Setzt man den Dividend = dem

Ter-

Terminus g in der Spalte A des obigen Schema; und den Divisor = c, und den Quotus = x: mithin $\frac{g}{c} = x$; so ist g = cx, folglich c : 1 = g : x eine geometrische Proportion, welcher, als Logarithmus derselben, die arithmetische; m : k = r : y correspondiret. Mithin ist

$$y = l.\ x = l.\ \frac{g}{c} = k + r - m = l.\ 1 + l.\ g - l.\ c$$

was zu erweisen war. * Ist l. 1 = 0; so ist wie der $l.\ \frac{g}{c} = l.\ g - l.\ c$, wie oben (300).

IV. Lehrsatz. Der Logarithmus einer Potenz wird erhalten, wenn man den Logarithmus der Wurzel mit dem Exponenten der Potenz multipliciret, und von diesem Producte das Product aus dem Logarithmus der Einheit in den um eine Einheit verringerten Exponenten der Potenz abzieht.

Beweis. Nimmt man aus der Spalte A einen Terminus z. B. d als Wurzel; so ist das Quadrat desselben = d^2. Setzt man nun dieses = x, so ist 1 : d = d : x eine geometrische Proportion, welcher, als ihr Logarithmus, diese

arith.

arithmetiſche correſpondiret $k : n = n : y$, mithin $y = l.x = l.d^2 = 2n - k = l.d \times 2 - l.1$. Eben ſo, wenn $d^3 = x$; iſt $1 : d = d^2 : x$ eine geometriſche Proportion, welcher als ihr Logarithmus die arithmetiſche correſpondiret $k : n = 2n - k : y$ mithin iſt $y = l.x = l.d^3 = 3n - 2k = l.d \times 3 - l.1 \times 2$. Gleichmäßig iſt $l.d^4 = l.d \times 4 - l.1 \times 3$ u. ſ. w., ſonach allgemein $l\,d^n = l.d \times n - l.1 \times n - 1$ was zu erweiſen war.

* Iſt $l.1 = 0$; ſo iſt wieder $l.d^n = l.d \times n$, wie oben (302), weil dann $l.1 \times n - 1 = 0$.

V. Lehrſatz. Der Logarithmus einer Wurzel wird erhalten, wenn man zum Logarithmus der gegebenen Potenz das Product aus dem Logarithmus der Einheit in den um eine Einheit verringerten Exponenten der Wurzel addirt, und dieſe Summe durch den Exponenten der Wurzel dividirt.

Beweis. Wenn $\sqrt{}d^2 = x$; mithin $d^2 = x^2$, ſo iſt $\vdots$ $1 : x : d^2$ eine geometriſche Proportion, welcher, als ihr Logarithmus, die arithmetiſche correſpondirt $\div$ $k : y : l.d^2$; mithin

$$y = \frac{l.d^2 + k}{2} = \frac{l.d^2 + l.1}{2} = l.x = l.\sqrt{}d^2$$

Eben

Eben so, wenn $\sqrt[3]{d^3} = x$, mithin $d^3 = x^3$; ist $1 : x = x^2 : d^3$ eine geometrische Proportion, welcher, als Logarithmus derselben die arithmetische correspondirt: $l.\,1 : l.\,x = l.\,x \times 2 - l.\,1 : l.\,d^3$; da nun in dieser arithmetischen Proportion die Summe der äussern Glieder gleich ist der Summe der mittleren: so ist $l.\,d^3 + l.\,1 = l.\,x + l.\,x \times 2 - l.\,1$, mithin (per Metathes.) $l.\,d^3 + l.\,1 + l.\,1 = l.\,d^3 + l.\,1 \times 2 = l.\,x + l.\,x \times 2 = l.\,x \times (1 + 2) = l.\,x \times 3$, folglich

$$l.\,x = \frac{l.\,d^3 + l.\,1 \times 2}{3} = l.\,\sqrt[3]{d^3}$$ ꝛc. Allgemein

ist also $l.\,\sqrt[n]{d^m} = \frac{l.\,d^m + l.\,1 \times n - 1}{n}$. *Ist $l.\,1 = 0$; so wird auch $l.\,1 \times n - 1 = 0$, mithin dann $l.\,\sqrt[n]{d^m} = \frac{l.\,d^m}{n}$ wie oben (303).

306. Zusatz. Auch sieht man, wenn unter eine geometrische Reihe irgend eine arithmetische gesetzt wird, die nicht von 0 anfängt, noch immer aus der Zahl der Differenzen *) wie viele gleiche Verhältnisse vom ersten Gliede der geome-

*) Wucherer's Anfangsgründe der Arithmetik ꝛc. S. 234.

geometrischen Reihe bis auf ein jedes anderes Glied derselben Reihe statt finden; oder, wenn die geometrische Reihe von 1 anfängt, das wie Vielfache des Grundverhältnisses ein jedes Glied der geometrischen Reihe sey. Denn setzt man allgemein die geometrische Reihe $= \div\div a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 \ldots$ oder $= \div\div 1 : q : q^2 : q^3 \ldots$ und die arithmetische, als eine steigende, $= \div m : m + d : m + 2d : m + 3d : m + 4d \ldots$, so zeigt augenfällig die Zahl der d, oder der Differenzen in den Gliedern der letztern Reihe das an, was so eben in diesem Zusatze behauptet wurde. Dieses (305. 306) nun der Grund, warum die Mathematiker die oben (297) in der Anmerkung angeführte ganz allgemeine Erklärung der Logarithmen aufgestellt haben.

307. Erklärung. Unter einem logarithmischen Systeme versteht man eine jede arithmetische Reihe von Zahlen, welche als Logarithmen anderer, eine geom. Reihe bildender Zahlen gelten. Da nun die Basis sowohl der geometrischen, als der arithmetischen Reihe unendlich verschieden gewählt werden kann; so sind unzählige logarithmische Systeme möglich. In jedem Systeme aber ist nur die Basis beyder Reihen

willkührlich. Denn ist diese einmahl gewählt; so sind alle folgenden Terminen unabänderlich bestimmt, weil sonst die Progression zernichtet würde, wenn man an ihre Stelle, mit Beybehaltung derselben Basis, nach Belieben andere Terminen setzen wollte.

308. Erklärung. Inzwischen versteht man gewöhnlich unter dem logarithmischen Systeme dasjenige, dessen Basis in Ansehung der geometrischen Reihe 1 : 10, und in Ansehung der arithmetischen Reihe 0 : 1 ist, weil hier die geometrische Reihe sich nach dem decadischen Gesetze richtet, und als solche sehr bequem ist; auch dann die Logarithmen gerade die Exponenten der geometrischen Progressionalzahlen werden, wodurch, weil l. 1 = 0, der Calcul leichter wird, als wenn das Gegentheil statt fände, wie aus dem obigen (II. III. IV. V. 305) erhellet. Dieses gemeine Logarithmensystem (systema logarithmorum vulgare) heißt auch das Briggische, von Heinrich Brigg, Prof. der Mathesis zu Oxford, welcher dasselbe 1624 aufstellte; da vor ihm der Schottländer Neperus die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4.. als Logarithmen gewählt hatte. In

Be-

Beziehung auf dieses gemeine System gelten beym Calcul bloß die oben (299—303) aufgestellten Regeln.

309. Zusatz 1. In dem gemeinen Logarithmen-Systeme (308) sind die arithmetisch proportionalen Zahlen, welche als Logarithmen der in der geometrischen Progression $1 : 10^1 : 10^2 : 10^3 : 10^4$.. vorkommenden Zahlen gelten, immer um eine Einheit kleiner, als die Zahl der Ziffern in denjenigen geometrisch proportionalen Zahlen, von denen sie Logarithmen sind; wie aus dem beygesetzten Schema erhellet.

A	B	C	L	L
a^0	1	1	0	0,0000000
a^1	10^1	10	1	1,0000000
a^2	10^2	100	2	2,0000000
a^3	10^3	1000	3	3,0000000
a^4	10^4	10000	4	4,0000000
a^5	10^5	100000	5	5,0000000
a^6	10^6	1000000	6	6,0000000

Ferner können eben diesen Logarithmen noch so viele Decimal-Nullen angehängt werden, ohne daß dadurch ihr Werth verändert wird; z. B. l. 1 = 0 = 0,0000000, und l. 10 = 1 = 1,0000000 ꝛc. Und solche Decimalnullen müssen ihnen angehängt werden, damit man aus ihnen auch die

Logarithmen der übrigen Zahlen, welche in der angenommenen geometrischen Reihe nicht vorkommen, sondern zwischen den zu dieser Reihe gehörigen Zahlen liegen, wie z. B. der Zahlen 2, 3, 4, 5, 9, 11, ꝛc. durch Annäherung, wie sich's weiter unten (312) zeigen wird, finden könne, da man auch die Logarithmen dieser Zwischenzahlen wissen muß, um den Calcul, worinn diese Zwischenzahlen vorkommen, logarithmisch führen zu können. In dieser Absicht setzt man zu ihnen gewöhnlich 7 Decimal-Nullen, weil man so schon im Stande ist, die Logarithmen der Zwischenzahlen aus den Logarithmen der Zahlen in der angenommenen geometrischen Reihe bis auf 1 Zehnmillionstel der Einheit zu finden, wie wir weiter unten (311. 312) sehen werden. Und nun wird, da auf diese Weise die Logarithmen in Decimalbrüche verwandelt werden, die an der Stelle der Ganzen vorkommende Ziffer die Characteristica des Logarithmus genannt, weil man aus ihr, da sie stäts um eine Einheit kleiner ist, als die Zahl der Ziffern in der dem Logarithmus correspondirenden Zahl, sofort erkennen kann, aus wie viel Ziffern die zugehörige Zahl bestehe; so wie auch umgekehrt die Zahl der

Zif-

Ziffern in einer gegebenen Zahl sofort anzeigt, wie groß die Characteristica des zugehörigen Logarithmus sey. Dagegen heißt der, nach der Characteristica folgende Decimalbruch die Mantissa des Logarithmus.

310. Zusatz 2. Ferner, da $a > 1$ gesetzt wird, und unter der Voraussetzung, daß $a^m = b$, $a^n = c$, mithin $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{b}{c}$ sey, $m = l.b$, $n = l.c$, und $m - n = l.\frac{b}{c}$ wird: ist leicht ersichtlich I) daß, wenn m und n positive Zahlen sind, und $m > n$ angenommen wird, auch $m - n$ positiv, und $\frac{a^m}{a^n} = \frac{b}{c} > 1$ werde, mithin die Logarithmen aller Zahlen, die > 1; positive Zahlen seyen. II. Daß, wenn $m = n$, mithin $m - n = o$, sonach $a^{m-n} = a^o = \frac{b}{c} = 1$; der Logarithmus der Einheit $= o$ sey. III. Daß, wenn $m < n$; mithin $m - n$ negativ, und folglich $a^{m-n} = \frac{b}{c}$ ein eigentlicher Bruch wird, auch der Logarithmus

von $\frac{b}{c}$ als einem eigentlichen Bruche stäts negativ sey.

311. Zusatz. 3. Zwischen die beyden Glieder des Grundverhältnisses der im gemeinen logarithmischen Systeme angenommenen geometrischen Reihe 1 : 10 : 100 ..., d. i. zwischen 1 : 10, oder zwischen $10^{0,0000000}$: $10^{1,0000000}$ können 9999999 Terminen, als solche eingeschaltet werden, die mit den benannten beyden Gliedern eine geometrische Reihe bilden, so daß $10^{1,0000000}$ der zehnmillionste Terminus nach $10^{0,0000000}$ wird. Denn wenn man den Exponenten des ersten Gliedes $10^{0,0000000}$ immer um ein Zehnmillionstel wachsen läßt; wie dieses z. B. geschieht, wenn man setzt

$$10^{0,0000000} : 10^{0,0000001} : 10^{0,0000002} : 10^{0,0000003} \ldots;$$

so stehen vorerst die auf diese Weise heraus kommenden Exponenten der Grundzahl 10 immer in einer arithmetischen Pro-

gres-

gression (wegen derselben Differenz), und so-

nach die Terminen selbst $10^{0,0000000}$; $10^{0,0000001}$

.... in einer geometrischen Reihe; zweytens

sind nach dem ersten Terminus $10^{0,0000000}$ zehn

Termini erforderlich, damit der Exponens 0,0000000 in 0,00000010 übergehe; weil allererst

$\frac{10}{10000000} = \frac{1}{1000000}$ ist. Sonach sind

$10 \times 10 = 100$ Termini nothwendig, damit 0,00000000 in 0,00000100 übergehe, weil allererst

$\frac{10}{1000000} = \frac{1}{100000}$ ist. Folglich sind 100×10

$= 1000$ Termini erforderlich, damit 0,0000000 in 0,00001000 übergehe, sonach 10000 Termini, damit der Exponens 0,00010000 entstehe; folglich

100000 Termini, damit der Exponens 0,00100000 heraus komme, mithin 1000000 Terminen für den Exponenten 0,1000000; sonach 10000000 Termini, damit der Exponens 1,0000000 entstehe. Also lassen sich zwischen die Glieder des Verhältnisses 1 : 10 noch 9999999 Termini setzen, die eine geometrische Progression bilden. Da nun in dieser Reihe der erste Terminus = 1, und der zehnmillionste nach dem ersten = 10 ist:

so ist unter den Mittelgliedern sicher Eines = 2, Eines = 3 ꝛc., mithin jede ganze Zahl, die zwischen 1 und 10 fällt, anzusehen, als erzeugbar aus der Grundzahl 10 mit einem Exponenten der < 1, und > 0 ist. Da nun eben dieser Exponens der Logarithmus einer solchen Zahl ist: so muß nothwendig der Logarithmus einer jeden zwischen 1 und 10 liegenden ganzen Zahl $< l.10$, und $> l.1$ seyn, mithin zur Characteristica 0, und in der Mantissa bedeutende Decimalziffern haben. Ein Aehnliches gilt von den Logarithmen der Zwischenzahlen zwischen 10, und 100 ꝛc. — Wie aber nun wirklich die Logarithmen der Zwischenzahlen aus den Logarithmen der in der angenommenen geometrischen Progression 1 : 10 : 100 ... vorkommenden Zahlen zu finden seyen, zeigt die Auflösung folgender Aufgabe.

312. Aufgabe. Den Logarithmus der Zahl 3 zu finden.

Auflösung. Da der Logarithmus von 3 zwischen $l.1 = l.10^{0.0000000} = l.a^{0.0000000}$ und $l.10 = l.a^{1.0000000}$ fällt (311): so suchet zu $a^{0.0000000} = 1.0000000$, und zu $a^{1.0000000} = 10.0000000$ den mittleren geometrisch pro-

por-

portionalen Terminus x. Nach der Analogie

$$\therefore : \left\{ \begin{array}{ccccc} a^{0.0000000} & : & x & : & a^{1.0000000} \\ 1.0000000 & : & x & : & 10.0000000 \end{array} \right\}$$

ist $x = \sqrt{a^{1.0000000}} = a^{\frac{1.0000000}{2}} = a^{0.5000000}$

$= \sqrt{10.0000000000000} = 3,1622777$. Sonach ist $0.5000000 = l.\ 3,1622777$.. Da nun $3.1622777 = a^{0.5000000}$ größer ist, als $3 = 3.0000000$, mithin auch $0.5000000 > l.\ 3$: so suchet wieder den mittleren geometrischen proportionalen Terminus zu $1.0000000 = a^{0.0000000}$ und zu $3,1622777 = a^{0.5000000}$. Nach der Analogie: $\therefore : \left\{ \begin{array}{ccccc} a^{0.0000000} & : & x & : & a^{0.5000000} \\ 1.0000000 & : & x & : & 3.1622777 \end{array} \right\}$

ist $x = \sqrt{a^{0.5000000}} = a^{\frac{0.5000000}{2}} = a^{0.2500000}$

$= \sqrt{[1.0000000 \times 3\ 1622777]} = 1.7782794$. Sonach ist $0.2500000 = l.\ 1.7782794$. Da nun $1.7782794 < 3$, mithin auch $0.2500000 < l.\ 3$: so suchet wieder den mittleren geometrischen Proportional-Terminus zu $1.7782794 = a^{0.2500000}$, und zu $3.1622777 = a^{0.5000000}$ und

den Logarithmus dieses mittleren Proportional-Terminus: und fahret so fort (mit der Aufsuchung des Logarithmus des mittleren, zu den schon gefundenen Terminen, wovon der eine nächst kleiner, und der andere nächst größer ist, als $3 = 3.0000000$, geom. proportionalen Terminus) bis ihr auf folgenden Terminus $a^{0.47712 13} = 3.0000000 = 3$ kommt. Denn hier ist der gesuchte Logarithmus (der Zahl 3) $= 0.47712 13$ gefunden.

313. Zusatz. 1. Nach dieser äußerst mühsamen Methode war es möglich, die Logarithmen aller Zahlen, die zwischen den in der geometrischen Reihe $\div$ 1 : 10 : 100 ... fortlaufenden in der Mitte liegen, zu bestimmen. Man brauchte aber nur die Logarithmen der meisten Primzahlen, um durch sie die Logarithmen aller übrigen Zahlen, die aus Primzahlen zusammengesetzt sind, ganz leicht zu bestimmen. Z. B. da $9 = 3 \times 3$, mithin $l.9 = l.3 + l.3$, so ist $0.4771213 + 0.4771213 = 0.9542426 = l.9$. Eben so, da $l.2 = 0.3010300$, und $l.10 = 1.0000000$, ist $l.5 = l.\frac{10}{2} = l.10 - l.2 = 0.6989700$ ꝛc.

314.

314. Zusatz. 2. Der Grund, warum den Logarithmen der Progressionszahlen 1, 10, 100 ꝛc. 7 Decimal-Nullen hinzugefügt, und dieselben dadurch in Decimalbrüche verwandelt werden, ist der, damit die Logarithmen der Mittelzahlen 2, 3, 7 ꝛc., welche Logarithmen nur durch die Ausziehung der Quadratwurzeln gefunden werden, wie aus dem obigen (312) erhellet, durch Annäherung so genau gefunden werden, daß daran nicht einmahl ein zehnmillionster Theil der Einheit fehle, und sonach = 0 gesetzt werden könne (309). Woraus zwar zugleich folgt, daß der Calcul mit Logarithmen der größtmöglichen Schärfe nicht Genüge leiste; aber doch derselben sich um so mehr annähere, in je mehreren Decimalen die Logarithmen, die man anwendet, gefunden sind.

315. Zusatz. 3. Wer mit Logarithmen rechnen will, muß logarithmische Tafeln bey Handen haben. Diese sind entweder größere oder kleinere. Kleinere heißen jene, welche nur die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 1000, oder auch bis 10000 liefern, und zur Mantissa nur 7 Decimalnoten geben. Größere aber sind solche, welche die Logarithmen von 1 bis 100000, und für die Mantissa derselben 10

bis

bis 14 Decimalnoten enthalten. * S. die Vte meiner 6 mathematischen Dissertationen S. 12 — 14.

Anmerkung.

Da die logarithmischen Tafeln nur die Logarithmen ganzer Zahlen liefern, und selbst diese nur, wenn sie zu den kleineren Tafeln gehören, für die Zahlen von 1 bis 1000 oder 10000: so findet sich häufig der Fall, daß man in seinen Tafeln entweder den einer gegebenen Zahl correspondirenden Logarithmus nicht findet, oder darin die Zahl nicht hat, welche einem gegebenen Logarithmus correspondiret. Für beyde Fälle gibt nun die nachstehende Lehre den nöthigen Aufschluß, so wie die Principien, auf denen die Anweisungen beruhen, welche man den logarithmischen Tabellen zum Behufe ihres Gebrauchs gewöhnlich vorgedruckt findet.

316. Lehrsatz. Die Differenzen auf einander folgender Zahlen, die zu den Tausenden und Zehnern der Tausende gehören, verhalten sich beynahe eben so zu einander, wie die Differenzen der ihnen correspondirenden Logarithmen.

Beweis. Wählet drey solche Zahlen.

$$\text{Z.B.} \left\{ \begin{matrix} a = 3546 \\ b = 3547 \\ c = 3548 \end{matrix} \right\} \text{deren Logarithmi sind}$$

$$\left\{ \begin{matrix} 3 \cdot 5947387 = m\,(p.hyp.) = l.\,a \\ 3 \cdot 5948612 = n\,.\,. = l.\,b \\ 3 \cdot 5949836 = p\,.\,. = l.\,c \end{matrix} \right\} \text{also} \left\{ \begin{matrix} b - a = 1 \\ c - a = 2 \end{matrix} \right\}$$

und $\begin{pmatrix} n - m = 1225 \\ p - m = 2449 \end{pmatrix}$. Da nun die Proportion beynahe gilt $1 : 2 = 1225 : 2449$, weil das Consequens des zweyten Verhältnisses nur um einen zehnmillionsten Theil der Einheit kleiner ist, als das doppelte des Antecedens 1225: so erhellet die Wahrheit des Lehrsatzes.

317. Zusatz. Also können die Differenzen auf einander folgender Tabularzahlen ohne merklichen Fehler in ein Verhältniß zu den Differenzen der ihnen entsprechenden Logarithmen gesetzt, oder mit denselben verglichen werden.

318. Aufgabe. Den Logarithmus einer ganzen Zahl, die in den logarithmischen Tabellen nicht enthalten ist, zu finden.

Auflösung. Die Zahl sey 196668. Da die Characteristica des Logarithmus dieser Zahl

= 5

= 5, (309), und die größte Characteristica in den kleineren Tafeln wenigstens = 3 ist: so ist die

I. Regel: Schneidet in der gegebenen Zahl von der Rechten zur Linken so viele Ziffern ab, als die Zahl der Einheiten anzeigt, um welche die Characteristica des Logarithmus der gegebenen Zahl größer ist, als die größte Characteristica in den Tafeln. Unsere Zahl wird sonach 1966.68. Suchet nun den Logarithmus der Zahl 1966. Dieser ist = 3.2935835.

II. Regel. Verwandelt die Characteristica dieses Logarithmus in die Characteristica des gesuchten Logarithmus der gegebenen Zahl; in unserem Beyspiele in 5, und ihr habt den Logarithmus 5.2935835 = l. (1966 × 100) = l. 196600 (299).

III. Regel. Suchet auch den Logarithmus der nächst größeren Zahl 1967 × 100 = l. 1967 + l. 100 = 3.2938044 + 2.0000000 = 5.2938044.

IV. Regel. Ziehet den Logarithmus der nächst kleineren Zahl 196600 ab von dem Logarithmus der nächst größeren 196700; wo die logarithmische Differenz in Decimalnoten = 2209

wird,

wird, und der Zahlen Differenz 196700 — 196600 = 100 correspondiret. Ferner ziehet auch die nächst kleinere Zahl 196600 von der gegebenen 196668 ab; diese zweyte Zahlendifferenz ist = 68.

V. Regel. Stellet nun die Proportion an: 100:68=2209:x (nach 316) d. i. die Differenz der Zahlen 196700 und 196600 verhält sich zur Differenz der Zahlen 196668 und 196600, wie die Differenz der Logarithmen der beyden ersten auf einander folgenden Zahlen sich zur Differenz der Logarithmen der beyden letzten Zahlen verhält. Aus dieser Proportion findet sich x beynahe = 1502. Wird sonach diese Differenz = 1502, welche zwischen dem Logarithmus der gegebenen Zahl 196668, und dem der nächst kleineren 196600 statt findet, zum Logarithmus der nächst kleineren addiret: so ist der Logarithmus der gegebenen Zahl gefunden, nämlich = 5.2937337.

* Gleichmäßig wird der Logarithmus der Zahl 4567893 (und einer jeden andern ähnlichen) gefunden. Es ist nämlich hier

1) l.4567 = 3.6596310.

2) l.4567000 = 6.6596310.

3) l.4568000 = 6.6597261.

4) 4568000 — 4567000 = 1000 d. i. erste Zahlendifferenz

5) 6.6597261 — 6.6596310 = 951 d. i. erste logarithmische Differenz

6) 4567893 — 4567000 = 893 d. i. zweyte Zahlendifferenz

7) 1000 : 893 = 951 : x, daher x = 849

8) mithin 6.6596310 + x = 6.6597159 = l. 4567893.

Anmerkungen.

1) Aus der gegebenen Auflösung der Aufgabe (318) läßt sich die Einrichtung der logarithmischen Tabellen, in denen eigene Spalten mit der Ueberschrift Differ. ꝛc. vorkommen, wie z. B. der von Vega zu Wien 1783 herausgegebenen, leicht begreiffen.

2) Ist die gegebene Zahl eine zusammengesetzte: so wird ihr log. leichter gefunden, wenn man die logarithmen ihrer Factoren addiret. Z. B. die Factores der Zahl 32302475 sind 3857 und 8375. Die Summe der logarithmen beyder gibt den log. der ganzen Zahl, nämlich 7.5092344.

3) Der nach den gegebenen Regeln gefundene logarithmus ist zwar nicht nach aller

Schärfe

Schärfe der richtige; wie aus dem gesagten (vergl. mit 314) von selbst erhellt; und er wird immer minder genau, je mehr die Characteristica des Logarithmus der gegebenen Zahl die größte Characteristica in den Tafeln, die man benutzt, übersteigt: inzwischen entsteht daraus für den ordinären Calcul kein beträchtlicher Nachtheil. Je größere Tafeln man benützt, desto genauer wird die Rechnung.

319. Aufgabe. Den Logarithmus eines gemeinen Bruchs zu finden.

Auflösung. Zieht den Logarithmus des Nenners ab vom Logarithmus des Zählers; die Differenz ist der verlangte Logarithmus des gegebenen gemeinen Bruches. Denn es ist $l.\frac{a}{b} = l.a - l.b.$ Z. B. $l.\frac{3}{4} = l.3 - l.4 = -0.1249387$

320. Aufgabe. Den Logarithmus eines Decimalbruchs zu finden.

Auflösung. Hat der Decimalbruch an der Stelle der ganzen ein 0, z. B. 0.23; so verwandelt ihn in einen gemeinen eigentlichen Bruch $= \frac{23}{100}$. Dann ist $l.23 - l.100 = l.0.23$.

Sind aber bey ihm Ganze vorräthig, z. B. 45.67; so suchet den Logarithmus der ganzen Zahl 4567, und vermindert die Characteristica desselben um so viele Einheiten, als Decimalnoten im gegebenen Bruche sind. Nämlich l. 4567 = 3.6596310; und mithin l. 45,67 = 1.6596310. Denn

$45.67 = \frac{4567}{100}$, folglich l. 45.67 = l. 4567 — l. 100 = 3.6596310 — 2.0000000 = 1.6596310.

321. Aufgabe. Den Logarithmus einer vermischten Zahl zu finden.

Auflösung. Verwandelt sie in einen uneigentlichen Bruch, und suchet den Logarithmus desselben. Z. B. l. $3\frac{2}{3}$ = l. $\frac{11}{3}$ = l. 11 — l. 3.

322. Aufgabe. Die zu einem Logarithmus, der in den Tafeln nicht genau enthalten ist, zugehörige Zahl zu finden.

Auflösung. Die Characteristica eines solchen gegebenen Logarithmus ist entweder < 3 oder = 3, oder > 3. Ist sie I) < 3, oder = 3, und die 7 Decimalnoten desselben, z. B. des Logarithmus 2.1851003 finden sich in den Tafeln nicht vor; so subtrahiret vom gegebenen Logarith-

rithmus den nächst kleineren Tabular-Logarithmus = 2.1846914. Die Differenz ist = 4089. Ziehet auch den nächst kleineren Tabular-Logarithmus vom nächst größeren = 2.1875207 ab, und diese andere logarithmische Differenz ist = 28293, welcher die Differenz der beyden, dem nächst kleineren, und nächst größeren Tabular-Logarithmus zugehörigen Zahlen = 1 correspondiret. Stellet nun die Proportion an: 28293 : 4089 = 1 : x d. i. der Differenz der zwey Tabular-Logarithmen correspondiret die Differenz der zwey, zu jenen Tabular-Logarithmen zugehörigen Zahlen = 1, welche Zahlendifferenz = x entspricht der Differenz, die zwischen dem gegebenen Logarithmus, und dem nächst kleineren Tabular-Logarithmus statt findet? Aus dieser Proportion wird $x = \frac{1}{10} = 0.1 = 0.14 = 0.144$ = 0.1445. Sonach, da dem nächst kleineren Tabular-Logarithmus die Zahl 153 correspondiret, ist die zu dem gegebenen Logarithmus zugehörige Zahl = 153 + 0.1 = 153.1 = 153.14 = 153.144 = 153.1445. * Es erhellet, daß man aus der angesetzten Proportion so viele Decimalen finden könne, als man will, weil die

erste logarithmische Differenz größer ist, als die zweyte. Ist aber II) die Characteristica des gegebenen Logarithmus > 3, z. B. die des Logarithmus 6.6596310: so ziehet 1) von ihr so viele Einheiten ab, bis sie = 3 wird, in unserem Beyspiele also 3 Einheiten, oder vom ganzen Logarithmus ziehet in unserem Beyspiele ab den Logarithmus 3.0000000 = l. 1000. Der herauskommende Logarithmus 3.6596310 ist der Logarithmus der gesuchten Zahl x dividirt durch 1000, oder

$= l.\frac{x}{1000}$ (300). 2) Suchet die dem Logarithmus 3.6596310 entsprechende Zahl (nach der vorigen Anweisung). Diese Zahl ist = 4567. 3) Werfet zu dieser Zahl so viele Nullen, als ihr Einheiten von der Characteristica des gegebenen Logarithmus weggenommen habt, um sie = 3 zu machen: dann ist die gesuchte Zahl gefunden. In unserem Beyspiele ist dieselbe also = 4567000. Denn die dem Logarithmus 3.6596310 entsprechende Zahl 4567 ist $= \frac{x}{1000}$, mithin

$x = 4567 \times 1000 = 4567000.$

Findet sich aber, wenn man die Characteristica des gegebenen Logarithmus in 3 verwandelt

hat,

hat, der neue Logarithmus nicht genau in den Tafeln; z. B. der Logarithmus 3.6597160, der entsteht, wenn man die Characteristica des gegebenen Logarithmus 6.6597160 um 3 vermindert: so suchet nach der obigen Methode (322 l.) die dem Logarithmus 3.6597160 correspondirende Zahl. Diese ist 4567,893. Folglich 6.6597160 = l. 4567,893 ⋈ 1000 = l. 4567893, mithin die gesuchte Zahl = 4567893. * Gleichmäßig findet man 6.5743594 = l. 3752834, l.

323. Aufgabe. Die einem negativen Logarithmus correspondirende Zahl zu finden.

Auflösung. Suchet die dem gegebenen Logarithmus, als positiv betrachtet, entsprechende Zahl. Machet dann diese Zahl zum Nenner eines Bruchs, dessen Zähler 1 ist. Dieser Bruch ist die dem negativen Logarithmus correspondirende Zahl. Z. B. — 2,4216039 =

l. $\frac{1}{264}$. Der

Beweis ist enthalten im Zusatze (310) vergl. mit der Aufgabe (319).

Anmerkungen.

1) In den log. Tabellen wird der Logarith-

mus von $\bullet = \infty$ infinito negativo $= -\infty$ gesetzt. Der Grund liegt darinn, weil die Verfasser dieser Tabellen (z. B. Vega) das

$$0 = \frac{1}{\infty} = 10^{-\infty} = \frac{1}{10^{\infty}} = \frac{1}{\infty}$$ setzen.

Daß aber dieses Verfahren der Schärfe nicht Genüge leiste, liegt zu Tage.

2) Nicht bey jedem Calcul ist es nöthig, all Decimalnoten des Logarithmus anzusetzen. Denn die millionsten Theilchen der Einheit sind in den ordinären Rechnungen so wenig von einem beträchtlichen Werthe, daß man sie vielmehr ganz wegläßt, und nur die 5 ersten Decimalen des Logarithmus ansetzt. Ist hiebey die wegzulassende Decimalnote > 5; so verfährt man, wie oben (148).

B.

Anwendung der Logarithmen.

Der große Nutzen der Logarithmen zeigt sich besonders 1) bey der Auflösung solcher Aufgaben, in denen die Unbekannte selbst der Exponens ist. 2) In der Zinsrechnung nach dem leibnitzischen Calcul, und überhaupt in allen Fällen, wo der Calcul durch Multiplication, Divi-

sion

sion ꝛc. sehr großer Zahlen zu führen ist, dergleichen Rechnungen besonders in der Trigonometrie vorkommen. Hier wollen wir nur einige Fälle der ersten Art, und von den Hauptfällen der Leibnitzischen Zinsrechnung das Nöthige anführen.

324. Aufgabe. Aus der Gleichung $a^x + b = c$ das x zu finden.

Auflösung. Es ist $a^x = c - b$, mithin $l.\, a^x = l.\,(c-b)$. Da nun $l.\, a^x = l.\, a \times x$: so ist $l.\, a \times x = l.\,(c-b)$, mithin $x = l.\frac{(c-b)}{l.\, a}$

* Wäre die Gleichung $a^x = cx + b$: so könnte daraus das x durch Logarithmen nicht gefunden werden. Ist sie aber $a^x b = c^{nx-r}$: so ist vor allem $c^{nx-r} = \frac{c^{nx}}{c^r}$, mithin $l.\, a \times x + l.\, b = l.\, c \times nx - l.\, c \times r$, folglich $l.\, b + l.\, c \times r = l.\, c \times nx - l.\, a \times x = x\,(l.\, c \times n - l.\, a)$, mithin $x = \frac{l.\, b + l.\, c \times r}{l.\, c \times n - l.\, a}$

325. Aufgabe. Wenn in einer geometrischen Reihe gegeben sind I) a, q, z, oder II) a, s, z, oder III) q, s, z; das n zu finden.

Auflösung für I). Es ist $aq^{n-1} = z$, mithin $l.a + l.q \times n - 1 = l.z$, folglich

$$n - 1 = \frac{l.z - l.a}{l.q}$$

Für II). Aus der Formel $s = \frac{qz - a}{q - 1}$

ist $q = \frac{s - a}{s - z}$, mithin $l.q = l.(s - a) - l.(s - z)$; und aus der Formel $z = aq^{n-1}$ ist $l.z - l.a = l.q \times n - 1$, mithin durch Substitution:

$l.z - l.a = [l.(s - a) - l.(s - z)] \times n - 1$,

folglich $n - 1 = \frac{l.z - l.a}{l.(s - a) - l.(s - z)}$

Für III). Aus der Formel $s = \frac{qz - a}{q - 1}$

ist $a = qz - sq + s$, folglich $l.a = l.(qz - sq + s)$ und aus der Formel $z = aq^{n-1}$ wird $l.z = l.a + l.q \times n - 1$, mithin durch Substitution:

$l.z = l.(qz - sq + s) + l.q \times n - 1$, folglich

$$n - 1 = \frac{l.z - l.(qz - sq + s)}{l.q.}$$

Beyspiel.

Ein Hausherr läßt einen Brunnen graben. Für die erste Klafter zahlt er 3 fl., für jede fol-

gende

gende dreymahl mehr, als für die nächst voraus-gehende; für die letzte beträgt die Zahlung 6561 fl.: es fragt sich, wie viele Klafter tief ist der Brunnen?

Auflösung. Da a, q, z gegeben ist, und n gesucht wird: so gilt die Formel

$$n - 1 = \frac{l.z - l.a}{l.q} = \frac{l.6561 - l.3}{l.3} =$$

$$\frac{3.8169700 - 0.4771213}{0.4771213} = \frac{3.3398487}{0.4771213}$$

$= 6,9991$ mithin $n = 1 + 6,999 = 7,999 = 8$.

Anmerkung.

Daß die zur geometrischen Progression gehörigen zwey Aufgaben 1) aus den gegebenen Terminen a, n, s das q und z zu finden, 2) aus den Terminen n, z, s das a und q zu finden, auch nicht durch Logarithmen lösbar seyen (282), erhellet leicht. Denn wenn man im ersten Falle aus der Formel $s = \frac{qz - a}{q - 1}$ das z sucht $= \frac{sq - s + a}{q}$ und nun diesen Werth in der Formel $z = aq^{n-1}$ substituirt: so erhält man

die Gleichung $\frac{sq - s + a}{q} = aq^{n-1}$, mithin $a - s = aq^n - sq$. Da erhellet aber sofort, daß die unbekannte q in der nten vermischten Potenz, ohne daß sie eine quadratische ist, vorkomme, und wegen der Subtraction $aq^n - sq$ die Logarithmen gar nicht anwendbar seyen. Ein ähnliches gilt in Ansehung der 2ten Aufgabe.

326. Aufgabe. Wenn der jährige Zins vom 100 = x, das ausgeliehene Capital = a, die Zahl der Jahre, welche das Capital a so ausstehet, daß der jährige Zins immer zum Capital geschlagen wird, = n, und die ganze Summe, welche nach n Jahren für a sammt allen seinen Zinsen zurück zu zahlen ist, = S gesetzt wird; eine Formel für S zu finden.

Auflösung. Nach der Proportion 100 : x a : y (d. i. 100 geben x jährigen Zins, was für einen jährigen Zins = y gibt das Capital a ?) ist $y = \frac{ax}{100} = a. \frac{x}{100}$; setzt man nun $\frac{x}{100} = m$; so ist $\frac{ax}{100} = am$, mithin nach dem 1ten

Jahre $S = a + am = a(m + 1)$. Bleibt nun diese Summe stehen; so ist der Zins für's IIte Jahr nach der Proportion $100 : x = a(m + 1) : y$;

$= y = a(m + 1) \cdot \frac{x}{100} = a(m + 1)m =$

$a\,m\,(m + 1)$; mithin wird am Ende des IIten Jahres $S = a(m + 1) + am(m + 1) =$

$(a + am)(m + 1) = a(m + 1)(m + 1) =$

$a(m + 1)^2$.

Eben so, wenn diese Summe $a(m + 1)^2$ wieder stehen bleibt, wird nach der Proportion $100 : x = a(m + 1)^2 : y$ der Zins für's IIIte

Jahr $= y = a(m + 1)^2 \cdot \frac{x}{100} = a(m+1)^2\,m =$

$am\,(m + 1)^2$, mithin für's IIIte Jahr

$S = a(m + 1)^2 + am(m + 1)^2 =$

$(a + am)(m+1)^2 = a(m+1)(m + 1)^2 =$

$a(m + 1)^3$. Gleichmäßig ergibt sich für's IVte Jahr $S = a(m + 1)^4$. Für's Vte $S = a(m+1)^5$, u. s. w., daher allgemein für n Jahre $S = a(m + 1)^n$ welches sonach die verlangte Formel ist.

Anmerkung.

Die Formel $S = a(m + 1)^n$ läßt sich in größter Schärfe auch so demonstriren. Gesetzt,

es

es sey für irgend ein Jahr, z. B. für das rte, wirklich $S = a(m+1)^r$; so ist auch für das nächstfolgende, d. i. $(r+1)^{te}$ Jahr $S = a(m+1)^{r+1}$. Denn der Zins, den $a(m+1)^r$ für das $(r+1)^{te}$ Jahr trägt, ist sodann (nach der Proportion $100 : x = a(m+1)^r : y$) $=$

$$y = a(m+1)^r \cdot \frac{x}{100} = a(m+1)^r \cdot m =$$

$am(m+1)^r$, mithin wird für das $(r+1)^{te}$ Jahr $S = a(m+1)^r + am(m+1)^r =$ $(a+am)(m+1)^r = a(m+1(m+1)^r =$ $a(m+1)^{r+1}$. Nun ist die Formel $S = a(m+1)^r$ wirklich wahr, wenn $r = 1, 2, 3, 4, 5$ gesetzt wird, wie aus obigem Calcul (326) erhellt, also ist sie auch wahr, wenn $r = 6$; mithin auch, wenn $r = 7$ u. s. w. ins unendliche fort, d. i. wenn $r = n$ gesetzt wird. Sonach ist allgemein $S = a(m+1)^n$.

327. Zusatz. Aus der Formel $s = a(m+1)^n$ ergibt sich 1) $a = \frac{s}{(m+1)^n}$

2) $m = \sqrt[n]{\frac{s}{a}} - 1$. Und mittelst der Logarithmen ist I) $l.s = l.a + l.(m+1).n$

II) $l.a = l.s - l.(m+1).n$

III)

$$\text{III)}\ \ l.(m+1) = \frac{l.s - l.a}{n}$$

$$\text{IV)}\ \ n = \frac{l.s - l.a}{l.(m+1)}$$

Einige Beyspiele, an denen sich Anfänger üben können.

1) Aufgabe. Wie viel muß für das Capital 1000 Rthlr. = a nach 100 Jahren = n bezahlt werden, wenn der jährige Zins zu 5 Procent immer zum Capital geschlagen wird?

Auflösung. Es ist hier

$$l.s = l.a + l.(m+1).n;\ \text{oder}$$

$$l.s = l.1000 + l.\left(\frac{5}{100} + 1\right).100 =$$

$$l.1000 + l.\left(\frac{1}{20} + 1\right).100 = l.1000$$

$$+ [l.21 - l.20].100 = 3.0000000$$

$$+ [1,3222193 - 1,3010300].100 =$$

$$3.0000000 + (0,0211893).100 =$$

$$3.0000000 + 2,1189300 = 5,1189300.$$

Da nun diesem Logarithmus der gesuchten Summe s die Zahl 131501 correspondirt: so ist s = 131501 Rthlr.

2) Aufgabe. Wie groß wird das Capital a = 3452 fl., wenn dasselbe n = 64 Jahre lang zu 6 Procent ausstehet?

Auflösung. Es gilt hier wieder die Formel l. s = l. a + l. (m + 1) n. Nun ist l. a = 3,5380708, und l. (m + 1) n = l. $\left(\frac{53}{50}\right)^{64}$ = (l. 53 — l. 50) 64 = [1,7242759 — 1,6989700] 64 = 0,0253059 × 64 = 1,6195776, mithin l. s = 5,1576484. Da nun diesem Logarithmus die Zahl 143763,4 correspondirt: so ist s = 143763,4 fl.

3) Aufgabe. Wie lange muß ein gegen 4 $\frac{1}{2}$ Procent ausgelegtes Capital a = 1000 fl. stehen bleiben, damit es vierfach, sonach = 4000 fl. werde?

Auflösung. Hier gilt die Formel $n = \frac{l.\,s - l.\,a}{l.\,(m + 1)}$.

4) Aufgabe. Cajus will nach n = 8 Jahren 10000 fl. = s erheben, ein wie großes Capital = a ist dazu nothwendig?

Auflösung. Hier gilt die Formel l. a = l. s — l. (m + 1) . n

5) Aufgabe. Das Capital a = 1000 fl., jährlich mit den Interessen vermehrt, wächst in

59 Jahren = n zu 10000 fl. = s an: wie groß ist das Procento?

Auflösung. Hier gilt die Formel

$$l.(m+1) = \frac{l.s - l.a}{n} = \frac{1{,}0000000}{59} =$$

$0{,}0169492 = l.\,1{,}039798 = l.(m+1)$, mithin

$m+1 = 1{,}039798$, folglich $m = 0{,}039798 = \frac{x}{100}$

mithin $x = 100\ m = 3{,}979800 = 4$ beynahe.

328. Aufgabe. Ein Capital a wird angelegt, und nach Verlauf eines jeden Jahres nicht nur mit den gefallenen Interessen zu x Procent, sondern auch überdieß noch mit einer Summe = b vermehrt: wie groß wird wohl die ganze Summe = s nach n Jahren seyn?

Auflösung. Zufolge der Bedingung der Aufgabe und der Auflösung der vorhergehenden (326) ist für's erste Jahr $s = a(m+1) + b$. Der Zins nun, den diese Summe für's zweyte Jahr trägt, wird mittelst der Proportion $100 : x = a(m+1) + b : y$,

erhalten $= [a(m+1) + b] \cdot \frac{x}{100} =$

$[a(m+1) + b]\,m = am(m+1) + bm.$

Mit-

Mithin ist für's zweyte Jahr $s = a(m+1)+b$ $+am(m+1)+bm+b = (a+am)(m+1)$ $+b+bm+b = (a+am)(m+1)+$ $b(m+1)+b = a(m+1)(m+1)+$ $b(m+1)+b = a(m+1)^2+b(m+1)+$ $b = a(m+1)^2+b[(m+1)+1]$. Eben so findet man für's dritte Jahr $s = a(m+1)^3+$ $b(m+1)^2+b(m+1)+b = a(m+1)^3+$ $b[(m+1)^2+(m+1)+1]$; woraus schon das Gesetz der Progression erhellet. Mithin wird nach n Jahren $s = a(m+1)^n+$ $b[(m+1)^{n-1}+(m+1)^{n-2}\ldots\ldots+1]$. Summiret man nun die abnehmende geometrische Reihe $(m+1)^{n-1}+(m+1)^{n-2}\ldots+1$ nach der Formel $s = \frac{qz-a}{q-1}$ wo $q = \frac{1}{m+1} =$ $(m+1)^{-1}$, und $z \overset{n}{=} 1$; $a = (m+1)^{n-1}$; so ist die Summe derselben $= \frac{(m+1)^n-1}{m}$.

Denn durch Substitution wird

$$s = \frac{qz-a}{q-1} = \left(\frac{1}{m+1}-(m+1)^{n-1}\right):$$

$$\left(\frac{1}{m+1}-1\right) = \left(\frac{1-(m+1)^n}{m+1}\right) : \frac{-m}{m+1} =$$

$$\left(\frac{1-(m+1)^n}{m+1}\right) \times \frac{m+1}{-m} = \frac{1-(m+1)^n}{-m} =$$

$$\frac{(m+1)^n-1}{m}.$$

Folg.

Folglich ist nun $b[(m+1)^{n-1}+(m+1)^{n-2}\ldots 1]$

$$= \frac{b[(m+1)^n - 1]}{m} = \frac{b(m+1)^n - b}{m},$$

mithin die gesuchte Summe

$$s = a(m+1)^n + \frac{b(m+1)^n - b}{m} =$$

$$\frac{am(m+1)^n + b(m+1)^n - b}{m} =$$

$$\frac{(am+b)(m+1)^n - b}{m}.$$ Hieraus folgt

$$\text{I) } a = \frac{sm+b}{m(m+1)^n} - \frac{b}{m}$$

$$\text{II) } b = \frac{sm-(am)(m+1)^n}{(m+1)^n - 1}$$

$$\text{III) } n = \frac{l.(sm+b) - l.(am+b)}{l.(m+1)}.$$

329. Zusatz. Ist $b = a$; so gehen durch gehörige Substitution und Reduction die vorigen Formeln in diese über: I) $s =$

$$\frac{(am+a)(m+1)^n - a}{m} = \frac{a(m+1)(m+1)^n - a}{m}$$

$$= \frac{a(m+1)^{n+1} - a}{m}$$ II) $a = \frac{sm}{(m+1)^{n+1}-1}$

III) $n = \frac{l.(sm+a) - l.(am+a)}{l.(m+1)}$

Einige Beyspiele.

1. Aufgabe. Cajus hat ein Capital von 1000 fl. zu 5 Procent ausstehen, wozu er jährlich nebst den Zinsen noch 100 fl. hinzulegt: es fragt sich, wie groß dieses Capital nach 25 Jahren seyn werde?

Auflösung. Hier gilt die Formel $s = \frac{(am + b)(m + 1)^n - b}{m}$; sonach ist $sm + b = (am + b)(m + 1)^n$, oder $l.(sm + b) = l.(am + b) + l.(m + 1)n$. Da nun $a = 1000$, $m = \frac{x}{100} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$, $b = 100$, und $n = 25$; so ist $am + b = 150$, und $m + 1 = \frac{21}{20}$, mithin $l.(am + b) = l.150 = 2,1760913$, und $l.(m + 1)n = 25 \times l.\left(\frac{21}{20}\right) = [l.21 - l.20] \times 25 = 0,0211893 \times 25 = 0,5297325$; folglich $l.(sm + b) = l.(am + b) + l.(m + 1)n = 2,1760913 + 0,5297325 = 2,7058238$ Da nun dem Logarithmus 2,7058238 die Zahl 507,953 correspondiret: so ist $sm + b = 507,953$, mithin $Sm = 507,953 - 100 = 407,953$, sonach $S = 407,953 : \frac{1}{20} = 8159,06$ fl.

2. Aufgabe. Ein Capital s = 10000 fl. / nach n = 20 Jahren ohne Zinsen fällig, soll so abgetragen werden, daß diese 20 Jahre hindurch jährlich eine gleiche Summe = a bezahlt werde (so, daß a jährlich mit den Interessen, und mit a vermehrt, nach 20 Jahren s = 10000 fl. bringe); wie groß muß nun a seyn, wenn z. B. die Interessen zu 4 Procent angenommen werden?

Auflösung. Da hier b = a; so gilt die Formel $a = \frac{sm}{(m+1)^{n+1} - 1}$ (329. II.).

Nun ist $sm = 10000 \times m = 10000 \times \frac{x}{100} =$

$10000 \times \frac{4}{100} = 10000 \times \frac{1}{25} = \frac{10000}{25} =$

400, und $(m+1)^{n+1} = \left(\frac{26}{25}\right)^{21}$ oder (per Logarithmos); $(n+1) \times l.(m+1) =$ $(l.26 - l.25) . 21 = (1,4149733 - 1,3979400) . 21$ $= 0,3576993$. Da nun nach den logarithmischen Tabellen dem Logarithmus 0,3576993 die Zahl 2,321 correspondirt: so ist $\left(\frac{26}{25}\right)^{21} =$ 2,321; mithin $a = \frac{400}{2,321 - 1} = \frac{400}{1,321} =$

x 2 302,8 fl.

302,8 fl. Folglich bringen 302,8 fl. zu 4 Procent angelegt, und jährlich mit den Interessen, und mit 302,8 fl. vermehrt, nach 20 Jahren die Summe S = 10000 fl. zum Vorscheine. Und wirklich wird auch aus der Formel für S (329) die Summe 9999,97 fl. = 10000 gefunden, wenn man $a = 302{,}8$ fl. und $m = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$ setzt.

330. Aufgabe. Wenn von dem jährlich mit seinen Interessen vermehrten Capitale a jährlich eine Summe b weggenommen wird, die nach n Jahren zu bezahlende Summe S zu finden.

Auflösung. Ist $b < am$ d. i. kleiner, als der jährige Zins; so wird die nach n Jahren fällige Summe S erhalten, wenn man in der Formel für S im vorigen Falle (328) die Zeichen des b in die entgegengesetzte verwandelt, wie von selbst erhellet. Sonach ist hier

$$S = \frac{(am - b)(m+1)^n + b}{m},$$ mithin

$$a = \frac{sm - b}{m(m+1)^n} + \frac{b}{m}$$ und

$$b = \frac{am(m+1)^n - sm}{(m+1)^n - 1}$$

und

und $n = \frac{l.(sm - b) - l.(am - b)}{l.(m + 1)}$. Ist aber $b > am$; so wird endlich $s = o$, und mithin gelten dann nur folgende Formeln 1) $a = \frac{b\,(m+1)^n - b}{m(m+1)^n}$, 2) $b = \frac{am\,(m+1)^n}{(m+1)^n - 1}$

3) $n = \frac{l.\,b - l.\,(b - am)}{l.\,(m + 1)}$.

Z. B.

1) Aufgabe. Cajus hat sein Vermögen = 5000 Rthl. zu 5 Procent ausstehen; aber nicht genug an den jährigen Zinsen, sondern muß jährlich noch 50 Thlr. darüber haben: wann wird das ganze Vermögen verzehrt seyn.

Auflösug. Der jährige Zins von 5000 Rthlr., wenn man ihn nach 5 Procent berechnet, ist 250 Thlr; mithin, da jährlich noch 50 Thlr. zugesetzt werden, wird $b = 300$ Thlr. $>$ am. Sonach gilt hier die Formel $n = \frac{l.\,b - l.\,(b - am)}{l.\,(m + 1)}$. Nun ist l. b = l. 300 = 2,4771213; und b — am = 300 — 250 = 50, folglich l. (b — am) l. 50 = 1,6989700;

und $l.(m+1) = l.\frac{21}{20} = l.\,21 - l.\,20 =$

$1{,}3222193 - 1{,}3010300 = 0{,}0211893$, sonach

ist $n = \frac{2{,}4771213 - 1{,}6989700}{0{,}0211893} = \frac{0{,}7781513}{0{,}0211893}$

$= 36{,}72..$ Jahre.

2) Aufgabe. Cajus legt ein Capital von 100000 fl. zu 5 Procent auf 20 Jahre an. Jährlich braucht er davon 2000 fl. $= b <$ am $=$ 5000 fl.: es fragt sich; wie groß die nach 20 Jahren ihm zu bezahlende Summe S sey?

Auflösung. Hier gilt die Formel $s = \frac{(am - b)(m+1)^n + b}{m}$. Durch Substitution und mittelst der Logarithmen wird $S = 199197{,}88$ $= 199197{,}9$.

3) Aufgabe. Ein Kaufmann begehrt von einem Wechselherrn 1000 Rthlr. Capital $= a$, und verspricht, dasselbe in 20 auf einander folgenden jährigen Terminen sammt den, für einen jeden Termin fälligen Interessen zu 5 Procent wieder abzutragen. Dagegen erklärt der Wechselherr, er wolle das ganze Interesse schenken, wenn der Kaufmann bestimmen könne, wie viel jährlich am Capitale und den Interessen bezahlt

wer-

werden müsse, damit ein Jahr so viel als das andere bezahlt, und auf diese Weise in 20 Jahren das Capital sammt den Interessen vollkommen entrichtet werde. Wie groß ist nun dieses jährige Zahlungsquantum?

Auflösung. Da von der Summe S, welche das zu 5 Procent ausgelegte Capital $a = 1000$ Rthlr. am Ende eines jeden Jahres bringt, jährlich eine Summe $b >$ am wegfällt: so gilt hier die Formel $b = \frac{am(m+1)^n}{(m+1)^n - 1}$.

Nun ist $am = 1000 \times \frac{1}{20} = 50$ und $(m+1)^n$

$= \left(\frac{21}{20}\right)^{20} = 2{,}697$, weil $[l.21 - l.20].20 =$

$0{,}4237860 = l.2{,}697$ gefunden wird; mithin $am(m+1)^n = 134{,}850$; und sonach

$b = \frac{am(m+1)^n}{(m+1)^n - 1} = \frac{134{,}850}{1{,}697} = 79{,}46$

$= 79{,}5$ Rthlr. Die Richtigkeit dieses Werthes erhellet sofort daraus, weil, wenn in der Formel

$a = \frac{b(m+1)^n - b}{m(m+1)^n}$ derselbe für b substituiret

ret wird, dann wieder für a der Werth $\frac{134,9115}{0,13485}$ = 1000 Rthlr. herauskömmt.

331. Aufgabe. Wenn eine Summe = a erst nach n Jahren ohne Zinsen zu bezahlen ist; zu bestimmen, was dieselbe werth sey, wenn sie heute schon ausgezahlt werden soll.

Auflösung. Wenn n = 1: so kann derjenige, welcher die, erst nach einem Jahre ohne Zins zu bezahlende Summe a gleich im Anfange dieses Jahres bezahlen soll, mit Rechte den Zins = am abziehen, den die Summe a in einem Jahre trägt. Also ist die Zahlung = a — am. Da aber der Zins am erst am Ende des Jahres fällig ist, und der Zähler ihn schon im Anfange dieses Jahres, also ein ganzes Jahr zu frühe bezieht: so kann der andere Theil, dem die Zahlung a — am geschieht, von dem Zähler mit Rechte fordern, daß er ihm von dem zu frühe bezogenen Zinse am auch den Zins entrichte, den am in einem Jahre trägt. Da nun der jährige Zins von am mittelst der Proportion 100 : x = am : y erhalten wird = y = am . $\frac{x}{100}$ =

am

$am \cdot m = am^2$; so ist nun die Zahlung $= a -$ $am + am^2$. Da aber der Zins am^2 wieder erst am Ende des Jahres fällig ist, mithin der Zahler, der ihn gleich im Anfange des Jahres entrichtet, dafür wieder den Zins am^3 mit Rechte verlangen kann; und da es so ins Unendliche fortgeht, daß nämlich immer einer dem anderen aufs neue etwas schuldig wird; so ist, wenn der Werth, den die erst nach einem Jahre zu bezahlende Summe a gleich im Anfange dieses Jahres hat, $= S$ genannt wird, $S = a - am + am^2 - am^3 + am^4 \ldots\ldots \frac{1}{\infty}$ mithin wird (multiplicando per m) $Sm = . + am - am^2 + am^3 - am^4 \ldots\ldots - \frac{1}{\infty}$, mithin (per additionem) $Sm + S = a$, und folglich $S = \frac{a}{m + 1}$

$= a \cdot \frac{1}{m + 1}$ Setzt man nun $n = 2$; so dürfte der Zähler diese Summe $S = a \cdot \frac{1}{m + 1}$ noch ein Jahr ohne Zins behalten; folglich wenn er dieselbe wieder gleich im Anfange dieses Jahres auszahlen soll; wird, wie vorhin, der Werth

derselben im Anfange dieses Jahres $= S =$

$$a \cdot \frac{1}{m+1} - am \cdot \frac{1}{m+1} + am^2 \cdot \frac{1}{m+1}$$

$\ldots\ldots \frac{1}{\infty}$, aus welcher Gleichung, wenn man wieder die beyden Seiten derselben durch m multiplicirt, und dann beyde Gleichungen addirt, $S = a \cdot \frac{1}{(m+1)^2}$ erhalten wird. Sonach hat die, erst nach zwey Jahren, ohne Zins fällige Summe a, wenn sie schon im Anfange dieser zwey Jahren ausbezahlt werden soll, den Werth $S = a \cdot \frac{1}{(m+1)^2}$. Eben so ist für drey Jahre $S = a \cdot \frac{1}{(m+1)^3}$ u. s. w.; mithin ist für n Jahre I) $S = a \cdot \frac{1}{(m+1)^n}$, oder l. $S =$ l. a — l. $(m+1) \cdot n$ Daher nun II) $m = \sqrt[n]{\frac{a}{s}} - 1$, oder l. $(m+1) = \frac{\text{l. a} - \text{l. s}}{n}$ III) $a = S(m+1)^n$, oder l. a = l. S + l. $(m+1) \cdot n$ IV) $n = \frac{\text{l. a} - \text{l. S}}{\text{l. } (m+1)}$

Anmer.

Anmerkung.

Das, was von einer Summe, die allererst nach n Jahren ohne Zinsen fällig ist, wenn sie heute schon bezahlt werden soll, rechtlich abgezogen wird, macht den Rabbat (Interusurium) aus, und die Berechnung desselben nach der in der Auflösung der vorhergehenden Aufgabe ersichtlichen Methode ward vom Hrn. von Leibnitz angestellt, und von dem Hrn. geh. R. Bilfinger gegen die Juristen vertheidigt, als welche Leibnitzen eines Irrthums, auch Pravitatis usurariae beschuldigten, theils weil sie den Leibnitzischen Calcul nicht recht verstanden, theils weil dieser Calcul mit den positiven Rechtsgesetzen nicht vereinbar schien, als welche die Zinsen von Zinsen verdammen, und nach denen sonach, wenn das ausgelegte Capital = a, und der Zins von 100 = x, mithin von $a = \frac{ax}{100}$, die Zahl der Jahre = n, und das nach n Jahren fällige Quantum = S gesetzt wird, nur die Formel gilt $S = a + \frac{axn}{100}$, welche von der oben (326) demonstrirten wesentlich verschieden ist. So lange nun diese positiven Gesetze bestehen; und sonach in

Hin-

Hinsicht auf Zinsen der Text „Caveatur, ne supprimatur Egestas“ vor diesem anderen die Bestimmung des Juristen besser characterisi, renden „Fiat justitia, et pereat mundus“ die Oberhand hat; kann freylich nicht bey der Berechnung der Interessen im bürgerlichen Leben nach unseren Formeln verfahren werden: inzwischen schadet dieses der Gültigkeit derselben nicht im Geringsten: und, was insbesondere den Calcul in der vorhergehenden Aufgabe (331) betrifft, „wird man doch, — wie in H. W. Clemms mathem. Lehrbuche I. Th. S. 174 bemerkt steht, — kein Gesetz aufweisen, daß einem nicht frey stehe, entweder auf baar Geld, oder auf Ziele zu handeln. So lange nun diese juridischen Gesetze währen; wird — wie das angeführte Lehrbuch fortfährt — allemahl ein Oeconom, der nur ein wenig rechnen kann, und nicht wider seinen Nutzen handeln will, besonders bey großen Summen, auf baar Geld, und nie auf Ziele handeln; und so werden, da dieses frey steht, jene Gesetze nach und nach von selbst unbrauchbar werden, wenn keine Fälle mehr vorkommen, worin ein anderer erst über zehn oder zwanzig Jahren was zu bezahlen schuldig seyn dörfte.“

Einige

Einige Beyspiele.

1) Aufgabe. Cajus vermacht im Testamente sein ganzes Vermögen = 20000 fl. = a dem Titius unter der Bedingung, daß er den unverzinslichen Gebrauch desselben dem Sempronius 16 Jahre lang = n lassen solle. Titius will nun diese Summe vom Sempronius sogleich erheben, mit dem Versprechen, ihm einen Rabbat zu 5 Procent zu gestatten. Es fragt sich, wie viel unter dieser Bedingung Sempronius zu bezahlen habe.

Auflösung. Hier gilt die Formel

$$S = a \cdot \frac{1}{(m+1)^n}$$

Anmerkung.

Nennt man das gesuchte = a, und 20000 fl. = S; so wird die Formel: $a = S \cdot \frac{1}{(m+1)^n}$

$= \frac{S}{(m+1)^n}$, wie oben (327).

2) Aufgabe. Statt der, allererst nach 16 Jahren ohne Zins zu erhebenden Summe = 20000 fl. will Titius mit 17000 fl. zufrieden seyn, wenn ihm die Zahlung sogleich geschieht.

Es fragt sich, nach was für einem Procento der hier statt findende Rabbat sich richte?

Auflösung. Hier gilt die Formel $m = \sqrt[n]{\frac{a}{S}} - 1$

3) Aufgabe. Cajus soll 1980 fl. so bezahlen, daß er einen Drittel nach 4 Monathen, den andern nach 8 Monathen, und den dritten nach 10 Monathen entrichte. Wenn er aber alles sogleich zahlen will, soll ihm ein Rabbat zu 8 Procent gestattet werden. Wie viel muß er nun unter dieser Bedingung zahlen?

Auflösung. Rechnet nach der Formel $S = a \cdot \frac{1}{(m+1)^n}$ für einen jeden Drittel insbesondere aus, was er werth sey, wenn er sogleich bezahlt wird. Die Summe dieser Werthe gibt dann das Gesuchte. * n wird hier ein Bruch.

4) Aufgabe. Cajus soll 8020 fl. so bezahlen, daß er 2600 bar, 900 nach 5 Monathen, 1000 nach 7 Monathen; 1400 nach $8\frac{1}{2}$ Monathen, und die übrigen 2120 fl. nach 11 Monathen bezahle. Cajus will aber die 8020 fl. beysammen behalten, und dieselben zur gehörigen Zeit auf einmahl bezahlen. Welches ist nun diese

Zeit,

Zeit, damit weder Cajus, noch sein Gläubiger einbüsse?

Auflösung. Suchet nach der Formel $S = a \cdot \frac{1}{(m+1)^n}$, was die erst nach 5 Monathen ohne Zins fälligen 900 fl. werth sind, wenn sie heute schon bezahlt werden. Dieser Werth heisse = p. Gleichmäßig suchet, welchen Werth die erst nach 7 Monathen ohne Zins fälligen 1000 fl., dann die erst nach $8\frac{1}{2}$ Monathen ohne Zins fälligen 1400 fl., und endlich 2120 fl. haben, wenn sie heute schon bezahlt werden. Diese Werthe seyen für 1000 fl. = r, für die 1400 fl. = q, und für die 2120 fl. = t. Da nun $2600 + p + r + q + t < 8020$ fl.: so suchet ferner nach der Formel $n = \frac{l.\,s - l.\,a}{l.\,(m+1)}$, wie lange das Capital $a = 2600 + p + r + q + t$ ausstehen müsse, damit es = 8020 fl. werde, und diese Zeit ist dann die Gesuchte.

332. Aufgabe. Wenn n Jahre lang eine bestimmte jährige Abgabe = a zu entrichten ist; die Summe S zu finden, welche, wenn sie sogleich bezahlt wird,

den

den Werth der einzelnen Abgaben zusammen genommen hat.

Auflösung. Die Abgabe a, die am Ende des ersten Jahres fällig ist, wenn sie sogleich bezahlt wird, hat den Werth $S = a - am + am^2 - am^3 \ldots \frac{1}{\infty} = a \cdot \frac{1}{m+1}$, wie im vorigen Falle (331). Mithin ist das, allererst nach 2 Jahren fällige a, wenn es sogleich bezahlt wird, $= S = a \cdot \frac{1}{m+1} - am \cdot \frac{1}{m+1} + am^2 \cdot \frac{1}{m+1} \cdot \frac{1}{m+1} \ldots \frac{1}{\infty} = a \cdot \frac{1}{(m+1)^2}$

Eben so wird das, allererst nach 3 Jahren fällige a, wenn es sogleich bezahlt wird, $= S = a \cdot \frac{1}{(m+1)^2} - am \cdot \frac{1}{(m+1)^2} + am^2 \cdot \frac{1}{(m+1)^2} \ldots \frac{1}{\infty} = a \cdot \frac{1}{(m+1)^3}$ u. s. w.

Mithin ist das, allererst nach n Jahren fällige a, wenn es sogleich bezahlt wird, $= S = a \cdot \frac{1}{(m+1)^n}$. Sonach ist der Werth aller Abgaben, wenn sie sogleich auf einmahl bezahlt wer-

werden, $= S = a \cdot \frac{1}{m + 1} +$

$a \cdot \frac{1}{(m+1)^2} \cdots + a \cdot \frac{1}{(m+1)^n} =$

$a\left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)^2} \cdots + \frac{1}{(m+1)^n}\right)$

Summiret man nun die auf der zweyten Seite der Gleichung in der Parentheſe ſtehende geometriſche Reihe nach der Formel $s = \frac{qz - a}{q - 1}$,

wo $q = \frac{1}{m+1}$, $a = \frac{1}{m+1}$, $z = \frac{1}{(m+1)^n}$;

ſo iſt dieſe Summe

$= \left\{\left[\frac{1}{m+1} \cdot \frac{1}{(m+1)^n}\right] - \frac{1}{m+1}\right\} : \left(\frac{1}{m+1} - 1\right)$

$= \left\{\left[\frac{1}{m+1} \cdot \frac{1}{(m+1)^n}\right] - \frac{1}{m+1}\right\} \times \frac{m+1}{-m}$

$= -\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{(m+1)^n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m(m+1)^n}$

$= \frac{1}{m} \cdot \left(1 - \frac{1}{(m+1)^n}\right)$. Folglich iſt nun

$s = a\left\{\frac{1}{m} \cdot \left(1 - \frac{1}{(m+1)^n}\right)\right\} =$

$\frac{a}{m} \cdot \left(1 - \frac{1}{(m+1)^n}\right)$.

333. Zusatz. Das $s = \frac{a}{m} \cdot \left(1 - \frac{1}{(m+1)^n}\right)$

so ist 1) $a = \frac{sm \cdot (m+1)^n}{(m+1)^n - 1}$

2) $n = \frac{l.a - l.(a - sm)}{l.(m+1)}$

Einige Beyspiele.

1. Aufgabe. Cajus genießt auf 5 Jahre lang eine jährliche Rente von 100 Rthlr.: er will sie aber sogleich für bares Geld zu 5 Procent verkaufen, und frägt, was sie werth sey?

Auflösung. $S = \frac{a}{m} \cdot \left(1 - \frac{1}{(m+1)^n}\right)$

Durch Substitution wird $s = 432{,}955$ Rthlr.

2. Aufgabe. Es will jemand seinem treuen Diener ein jährliches Auskommen $= a = 300$ fl. bey einer Bank durch 30 Jahre $= n$ anweisen. Die Interessen bey dieser Bank sind zu 5 Procent angesetzt; wie groß muß die Summe $= s$ seyn, die er bey der Bank zu erlegen hat?

Auflösung. Hier ist wieder $s = \frac{a}{m} \cdot \left(1 - \frac{1}{(m+1)^n}\right)$

3. Aufgabe. Für ein Haus biethet Cajus 700 fl., und zwar 400 bar, die übrigen 300 aber will er in 6 Jahren, jedes Jahr 50 fl. bezahlen. Dagegen biethet Titius 900 fl., und zwar 515 bar, und die übrigen 385 fl. will er in 11 Jahren, jedes Jahr 35 fl. bezahlen. Welches Angeboth ist das vortheilhafteste?

Auflösung. Suchet nach der Formel $s = \frac{a}{m} \cdot \left(1 - \frac{1}{(m+1)^n}\right)$ den Werth, welchen die 6 Jahre lang jährlich zu bezahlenden 50 fl. heute schon zusammen genommen haben; und addiret diesen Werth zu 400 fl., die Cajus bar bezahlen will. Eben so suchet den Werth, welchen die 11 Jahre lang jährlich zu bezahlenden 35 fl. heute schon zusammen genommen haben, und addiret denselben zu 515 fl., die Titius bar bezahlen will. Vergleicht dann beyde Summen, und die Differenz gibt die Antwort auf die vorgelegte Frage.

Schluß-Anhang zum Ganzen.

Von den Permutationen und Combinationen.

334. Erklärung. Permutationen (Versetzungen) sind wiederhohlte Setzungen mehrerer gegebenen Dinge, so daß alle möglichen Ordnungen, nach denen sie auf einander folgen können, eingehalten werden. Dagegen sind Combinationen überhaupt Verbindungen gegebener Dinge zu Paaren (Amben), zu Dreyen (Ternen), zu Vieren (Quaternen) u. s. w.

335. Aufgabe. Alle mögliche Versetzungen einer gegebenen Menge von Dingen zu finden.

Auflösung. „Zwey Dinge haben zwey = 2 . 1 Ordnungen z. B. ab, ba. Kömmt dazu das dritte = c, so kann es in jeder der beyden vorigen 2 Ordnungen 3 Stellen, hinten, mitten, vorne einnehmen: also haben 3 Dinge 3 . 2 = 6 = 3 . 2 . 1 Ordnungen. Z. B. abc, acb, cab, bac, bca, cba. In jeder dieser 6 Ordnungen kann das 4te Ding = d, 4 Stellen einnehmen, die hinterste, zwischen den beyden letzten, zwischen beyden ersten, die vorderste.

z. B. abcd, abdc, adbc, dabc. Also haben 4 Dinge 4 . 6 = 24 = 4 . 3 . 2 . 1 Ordnungen. In jeder derselben gibt es 5 Stellen für das 5te Ding e, drey, da es allemahl zwischen ein Paar der vorigen 4 zu stehen kömmt, eine hinten, und eine vorne, z. B. abcde, abced, abecd, aebcd, eabcd. Also haben 5 Dinge 5 . 24 = 120 = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 Ordnungen, u. s. w. Wäre dieses Gesetz allgemein wahr; so wäre für n — 1 Dinge die Zahl der Ordnungen = n — 1 . n — 2 . . . . 3 . 2 . 1 In jeder dieser Ordnungen für n — 1 Dinge gäbe es dann für das hinzukommende nte Ding n — 2 Zwischenstellen, und eine hinten, und eine vorne, das ist, auch 2 äußere, mithin n — 2 + 2 = n Stellen. Folglich müßte dann die Zahl der Ordnungen von n — 1 Dingen mit n multiplicirt werden, um die Zahl der Ordnungen von n Dingen zu finden. Ist also die Zahl der Ordnungen von n — 1 Dingen = n — 1 . n — 2 . . . . 3 . 2 . 1; so ist dann die Zahl der Ordnungen für n Dinge = n . n — 1 . n — 2 . . . . . 3 . 2 . 1. Nun findet wirklich das erste Gesetz in den berechneten Fällen statt, da z. B. für n — 1 = 5 Dinge die Zahl der Ordnungen = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 ist: also muß sie

bey n = 6 Dingen = 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 seyn. Setzt man nun n — 1 = 6, so folgt eben so, daß sie bey n = 7 Dingen = 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 sey, mithin gilt dieses Gesetz auch bey 8 Dingen, mithin auch bey 9 u. s. w. ohne Ende, d. i. allgemein für jede gegebene Menge von Dingen. * Käſtner's Anal. endl. Gr. 2te Aufl. S. 26." — Sonach ist z. B. die Zahl der Ordnungen für 24 Menschen an einer Tafel = 620448401733239439360000 = 24 . 23 . 22 . 21 . 20 . 19 . 18 . 17 . 16 . 15 . 14 . 13 . 12 . 11 . 10 . 9 . 8 . 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1. Eben so die Zahl der Versetzungen für die 8 Töne in der Musik = 8 . 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 40320.

336. Zusatz. Sind unter n Dingen m Dinge einerley; und man will bloß die Zahl der Versetzungen der verschiedenen Dinge d. i. der eigentlichen Versetzungen wissen: so muß die Zahl der Versetzungen der n Dinge durch die Zahl der Versetzungen der m Dinge dividiret werden. Z. B. die Zahl der Versetzungen für die 7 Buchstaben im Worte Joannes ist $\frac{7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1}{2} = \frac{5040}{2} = 2520.$

Eben

Eben so ist die Zahl der eigentlichen Versetzungen für die Buchstaben im Worte Jucundus $= \frac{40320}{6} =$ 6720. Allgemein gilt hier die

Formel: $\frac{1.2.3...m.m+1.m+2...n}{1.2.3...m} =$

$m+1.m+2...n$. Denn wenn unter n Dingen m Dinge einerley sind: so müßen in der Menge der Ordnungen für n Dinge so viele Ordnungen einerley seyn, als die Zahl der Versetzungen für m Dinge ausweißt. — Gleichmäßig verfährt man, wenn unter n Dingen Eines r mahl, Eines m mahl ꝛc. vorkömmt. Z. B. die Zahl der Versetzungen der Buchstaben im Worte Sebastianus ist $= \frac{11.10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}{3.2.1.2.1}$

$= 3326400.$

337. Aufgabe. Alle für eine Menge gegebener Dinge, die alle verschieden sind, und auf deren mögliche Permutationen man keine Rücksicht nimmt, mögliche Combinationen zu finden.

Auflösung. Wenn die gegebenen Dinge sind a, b, c, d, e, ꝛc.: so verbindet vorerst

ein jedes dieser Dinge mit einem jeden einzelnen, nach ihm folgenden, und ihr erhaltet alle mögliche Amben, z. B. ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de, zweytens verbindet eine jede dieser Amben mit einem jeden der nach ihr folgenden einzelnen Dinge, und ihr erhaltet alle Ternen z. B. abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde. Gleichmäßig findet man dritttens, wenn man eine jede Terne mit den einzelnen, auf sie folgenden Dingen verbindet, alle Quaternen z. B. abcd, abce, abde, acde, bcde; und durch die Verbindung einer jeden Quaterne mit jedem einzelnen auf sie folgenden Dinge viertens alle Quinen z. B. abcde u. s. w. * Huberti Arithmetica S. 132.

338. Zusatz. Sonach haben 5 verschiedene Dinge in allem 26 Verbindungen, und zwar 10 nach 2, eben so viele nach 3, 5 nach 4, und eine nach 5. Setzt man nun Eins der gegebenen Dinge = a, zwey = 2a, drey = 3a, vier = 4a, fünf = 5a u. s. w., so ist die Anzahl der gegebenen Dinge ein Glied von derjenigen Potenz des Binomi-

ums's

um's $a + b$, welche die Zahl der gegebenen Dinge anzeigt, wenn man in dieser Potenz den Buchstaben b wegläßt. Z. B. läßt man in $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$, das b weg: so bleibt $a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 5a$, wo der Terminus 5a die gegebenen 5 einzelnen Dinge anzeigt, wie auch aus dem höchsten Exponenten von a die Zahl der gegebenen Dinge ersichtlich ist. Ferner zeigen die Exponenten von a an, was für Combinationen, und die Coefficienten; wie viele Combinationen nach einer jeden Ordnung möglich sind. Daher nun die Regel, welche manche Mathematiker *) für Anfänger aufstellen, denen sie die Combinationslehre nach Grundsätzen der höheren Analysis **) noch nicht in aller Schärfe vortragen können, und doch gleichwohl eine Methode angeben möchten, die möglichen Combinationen einer gegebenen Menge von Dingen zu bestimmen: „Erhebet das Binomium $a + b$ zu derjenigen Potenz, welche die Zahl der gegebenen Dinge anzeigt,

---

*) Z. B. Trentel's Comp. Algeb. elem. 225.

**) Kästner's Anal. endl. Größen. 2te Auflage. S. 735. folg.

zeigt, und lasset darin den Buchstaben b weg. Die Exponenten von a, welche > 1, zeigen dann an, was für Combinationen, und die Coefficienten, wie viele Combinationen nach einer jeden Ordnung möglich sind."

F. Grube +

F. Grube Ph: Cand:

Ein-

Eingeschlichene Fehler.

Seite XII Zeile 11 statt hoffe — lies hoffe"

S. XXVIII Z. 3 — 4 st. Gleichungen. — l. Gleichungen."

S. 1 Zeile 3 statt und ihrer — l. und von ihrer

S. 2 Z. 27 st. Quantität — l. Qualität

S. 8 Z. 17 st. also nicht — l. also eigentlich nicht

S. 14 Z. 4 st. Bimillionen — l. Bimillionen oder Billionen

— Z. 7 st. Trimillionen — l. Trillionen, oder Trillionen

— Z. 7 st. neunten — l. neunzehnten

S. 17 Z. 24 st. I. — lies II.

S. 20 Z. 25 st. letzte — l. erste

S. 24 Z. 14 st. decadische — l. decadische ꝛc.

S. 26 Z. 18 st. steckt — l. steckt (42)

S. 30 Z. 26 st. Zehner — l. die Zehner

S. 35 Z. 26 st. Calcule — l. Calcul

S. 43 Z. 18 st. II $\frac{7 < 6}{500}$ — l. II $\frac{76}{500}$

S. 56 Z. 6 st. Va^3 — l. a^3

S. 111 Z. 14 st. $442''$ — l. $442'$

S. 113 Z. 11 st. 60^{III} — l. 6^{III}

S. 126 Z. 7 st. $\frac{9}{12}$ — l. $\frac{9}{12}$

4

320

25

Seite 144 Zeile 2 statt 8.00 — lies 8.000
S. 271 Z. 12 st. Schilgkröte — l. Schildkröte
S. 304 Z. 20 st. 32302475 — l. 32302375
S. 311 Z. 11 st. l. $\frac{(c-b)}{l.a}$ lies $\frac{l.(c-b)}{l.a}$
S. 314 Z. 1 st. aq^n 1 lies aq^{n-1}
S. 315 Z. 4 st. $\equiv$ lies $=$
S. 323 Z. 19 st. 2.221 lies 2,321
S. 329 Z. 15 st. Sm $\mp$ S lies Sm $+$ S

Staats-
Bibliothek
Bamberg

Jan 22 18. 10. hora.

1

Jndruka ex Jan. S. Landavii

Richards

Richard 1

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Metz, Andreas, 1767-1839 / Metz, Andreas / Göbhardt, Joseph Anton

Handbuch der Elementar-Arithmetik in Verbindung mit der Elementar-Algebra
Zum Gebrauche für Anfänger

Bamberg und Würzburg 1804

Bamberg, Staatsbibliothek -- Ma.o.75
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11739812-2